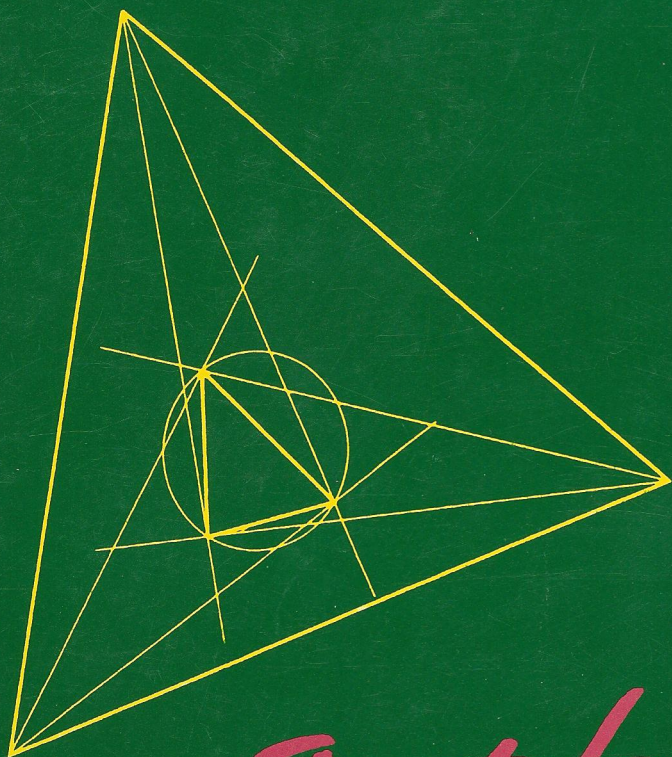




اعداد مختلط و هندسه

لیانگ - شین هان

ترجمه محمد بهفروزی



$a + bi$

اعداد مختلط و هندسه

لیانگ - شین هان

ترجمه محمد بهفروزی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Complex Numbers & Geometry

Liang-Shin Hahn

The Mathematical Association of America, 1994

اعداد مختلط و هندسه

تألیف لیانگ - شین هان

ترجمه محمد بهفروزی

ویراسته دکتر محمد هادی شفیعیه

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۷۶

تعداد ۳۰۰۰

حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی

چاپ: منفرد

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Hahn, Liang - Shin

هان، لیانگ - شین.

اعداد مختلط و هندسه / لیانگ - شین هان؛ ترجمه محمد بهفروزی؛ ویراسته محمد هادی شفیعیه. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.

چهار، ۱۷۹ ص. - مصور. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۸۷۲: ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۱۱۱) ISBN 964-01-0872-3

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار).

Complex numbers & geometry.

عنوان اصلی:

۱. اعداد مختلط. ۲. هندسه جدید. الف. بهفروزی، محمد، ۱۳۱۱ - ، مترجم. ب.

شفیعیه، محمد هادی، ۱۳۹۸ - ، ویراستار. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.

۵۱۶/۰۴

۶ الف ۲۵۵ / ۵۲ QA

۱۳۷۶

۱۱۸۵۳ - ۷۶ م

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	معرفی مؤلف
۳	پیشگفتار مؤلف
۵	۱ اعداد مختلط
۵	۱.۱ آشنایی با اعداد انگاری
۷	۲.۱ تعریف اعداد مختلط
۱۳	۳.۱ معادله‌های درجهٔ دوم
۱۶	۴.۱ اهمیت اعداد مختلط
۱۸	۵.۱ رابطهٔ ترتیبی در هیأت اعداد مختلط
۲۱	۶.۱ نابرابری مثلثی
۲۲	۷.۱ صفحهٔ مختلط
۲۷	۸.۱ نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی
۳۴	۹.۱ ریشه‌های n ام عدد ۱
۴۰	۱۰.۱ تابع نمایی
۴۴	تمرینها
۵۵	۲ کاربرد در هندسه
۵۵	۱.۲ مثلثها
۶۳	۲.۲ قضیهٔ بطلمیوس-اویلر
۶۵	۳.۲ قضیه‌های کلیفرد

صفحه	عنوان
۶۹	۴.۲ دایره نه نقطه
۷۳	۵.۲ خط سیمسن
۸۱	۶.۲ تعمیمهای قضیه سیمسن
۸۶	۷.۲ قضیههای کانتور
۹۲	۸.۲ قضیه فویرباخ
۹۸	۹.۲ قضیه مورلی
۱۰۵	تمرینها
۱۱۴	۳ تبدیلهای موبیوس
۱۱۴	۱.۳ تصویر گنجنگاشتی
۱۱۷	۲.۳ تبدیلهای موبیوس
۱۲۱	۳.۳ نسبتهای ناهمساز
۱۲۶	۴.۳ اصل تقارن
۱۲۹	۵.۳ یک جفت دایره
۱۳۳	۶.۳ دسته دایرهها
۱۳۴	۷.۳ نقاط ثابت و رده بندی تبدیلهای موبیوس
۱۳۹	۸.۳ انعکاس
۱۴۷	۹.۳ الگوی پوانکاره برای هندسه ناقلیدسی
۱۴۹	تمرینها
۱۵۴	سخن آخر
۱۵۵	پیوست الف
۱۵۵	مقدماتی از هندسه
۱۵۵	الف. ۱. مرکزهای مثلث
۱۶۴	الف. ۲. زاویه های محاطی
۱۶۷	الف. ۳. قضیه ناپلئون
۱۶۸	الف. ۴. دایره آپولونیوس
۱۷۲	پیوست ب
۱۷۲	معماهای سال نو
۱۷۷	فهرست راهنما

معرفی مؤلف

لیانگ شین هان^۱ در تاینان^۲، تایوان، به دنیا آمد. از دانشگاه استنفورد درجهٔ دکترا (Ph.D) گرفت، مدت کوتاهی در دانشگاه جانز هاپکینز تدریس می‌کرد و سپس به دانشگاه نیومکزیکو منتقل شد، و تا کنون در آنجا اشتغال دارد. دارا بودن مقام استادی مدعو در دانشگاه سیاتل، دانشگاه دولتی تایوان (تایپه)، دانشگاه توکیو، دانشگاه بین‌المللی مسیحی (توکیو)، و دانشگاه سونیا (توکیو) به او این امتیاز را بخشیده است که ریاضیات را در سه کشور و به سه زبان تدریس کند.

مؤلف مسائل بسیاری را در ماهنامهٔ ریاضی امریکا مطرح نموده است و حدسیهٔ او دربارهٔ کسرهای مصری در بسیاری از جاها مورد استناد قرار گرفته است. تا سال ۱۹۹۰ طرح مسائل مسابقات ریاضی نیومکزیکو بوده است. وی از ستایشگران پروپا قرص شیوه‌های آموزش جرج پولیاست، و بازی پینگ‌پونگ، پرورش گل سرخ، گوش دادن به موسیقی کلاسیک، و نیز طرح معماهای ریاضی سرگرمیهای مورد علاقهٔ او هستند.

هدف وی در این کتاب این است که نشان دهد می‌توان اعداد مختلط و هندسه را به زیبایی در هم آمیخت و در نتیجه به برهانهای ساده و تعمیمهای طبیعی بسیاری از قضایای هندسهٔ مسطحه مانند قضایای ناپلئون، بطلمیوس - اویلر، سیمسن و مورلی دست یافت.

این کتاب با شروع از ساختمان اعداد مختلط، خواننده را در ۱۷۶ صفحه‌ای که شامل مبادی و دستورهایی برای همه است، حتی آنانی را که اطلاعات پیشرفتهٔ ریاضی دارند، به سیر و تفرج می‌کشاند.

کتاب خودکفاست، بدین معنی که بسیاری از فصلهای آن را می‌توان مستقلاً مطالعه کرد. متجاوز از ۱۰۰ تمرین در آن گنجانده شده است. این کتاب برای تدریس واحد درس هندسه، یا برای سمینار حل مسائل، و یا برای افزایش معلومات ریاضی دانشجویانی که می‌خواهند ریاضیات بیشتری بدانند، مناسب است.

پیشگفتار مؤلف

در حوزه اعداد حقیقی، کوتاهترین راه بین دو واقعیت
راهی است که از حوزه اعداد مختلط می‌گذرد.
ژ. آدامار

این کتاب دست‌آورد درسهایی است که برای دبیران آینده دبیرستانها در دانشگاه نیومکزیکو در نیمسال بهاری سال ۱۹۹۱ عرضه کرده‌ام. در عین حالی که معتقدم روش اصل موضوعی اهمیت بسیار دارد، اما تأکید خیلی زیاد بر آن در یک درس مقدماتی هندسه، دانشجو را نسبت به این موضوع دلزده می‌کند و امکان درک زیبایی و شوق‌انگیزی هندسه را ممکن است در آنها برای همیشه از بین ببرد. در دبیرستانهای ما، اعداد مختلط برای حل معادلات درجه دوم مطرح می‌شوند و پس از آن دیگر سخنی از آنها به میان نمی‌آید. دانش‌آموزان به حال خود گذاشته می‌شوند با این احساس که اعداد مختلط ساختگی هستند و فی‌نفسه فایده‌ای ندارند و فقط برای اینکه بتوانیم همه معادله‌های درجه دوم را حل کنیم اختراع شده‌اند. در واقع، مطالعه اعداد مختلط برای دبیران آینده و یا دانشجویانی که می‌خواهند آن را عمیقاً دنبال کنند موضوعی آرمانی است. مطالعه اعداد مختلط به دانشجویان این مجال را می‌دهد که دستگاههای اعداد، بردارها، مثلثات، هندسه و مباحث زیاد دیگری را که در دبیرستان مورد بحث قرار می‌گیرند دوباره مرور کنند بی‌آنکه به دیدگاه واحد توابع مقدماتی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها مواجه می‌شویم نیاز پیدا کنند.

متأسفانه در برنامه ریاضیات دبیرستانی ما، اعداد مختلط و هندسه به‌کلی به دست فراموشی سپرده شده‌اند. هدف این کتاب این است که ثابت کند این دو مبحث را می‌توان به زیبایی در هم آمیخت و در نتیجه به استدلالهای بسیار ساده و تعمیمهای طبیعی بسیاری از قضایای هندسه

مسطحه مانند قضیه ناپلئون، قضیه سیمسن و قضیه مورلی دست یافت. راستش را بخواهید، دختری از دانشجویان من به من گفت که نمی‌تواند تصور کند کسی که از خواندن مطالب این کتاب به شوق نیاید، هرگز بتواند به ریاضیات علاقه‌مند شود.

کتاب خودکفاست، یعنی نیاز به هیچ زمینه قبلی از اعداد مختلط ندارد و مطالبش را می‌توان با خیال راحت در یک نیمسال تحصیلی تدریس کرد. فصلهای ۲ و ۳ را می‌توان مستقلاً مطالعه کرد. متجاوز از ۱۰۰ تمرین، از تمرینهای عملی گرفته تا تمرینهای فکری، در آن نهاده شده است و از خواننده جداً خواسته می‌شود که سعی کند دست کم نیمی از آنها را حل کند. هرچه که از هندسه مقدماتی مورد نیاز است در پیوست الف آمده است. پیچیده‌ترین ابزاری که در این کتاب از آن استفاده شده فرمولهای جمع توابع سینوس و کسینوس و دترمینانهای مرتبه سوم هستند: در چندین جا به ماتریسها اشاره شده است ولی جنبه تکمیلی دارد و خوانندگانی که با ماتریسها آشنا نیستند می‌توانند با خیال راحت از خواندن این قسمتها صرف‌نظر کنند. معتقدم که این کتاب برای دانش‌آموزان دبیرستانها مفید است و مطالعه آن بر معلومات آنها می‌افزاید.

برای من جای بسی مسرت است که قدردانی خالصانه خود را از همکاران و دوستانم، استادان جف دیویس، برنارد اپستاین، روبن هرش، فرانک کلی و دوشیزه موارا را برتسن که همه آنها در موارد بیشمار انگلیسی نپخته مرا اصلاح نموده‌اند (انگلیسی زبان مادری‌ام نیست) ابراز دارم.

کلام آخر ولی نه آخرین کلام، از استاد راجر هورن، سرپرست هیأت تحریریه، که با شکیبایی تمام دستنویس مرا دستکاری و انگلیسی آن را اصلاح نموده است عمیقاً سپاسگزاری می‌کنم.



اعداد مختلط

۱.۱ آشنایی با اعداد انگاری

یکی از مهمترین ویژگیهای اعداد حقیقی این است که در آنها اعمال: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به استثنای تقسیم بر صفر) را می‌توان انجام داد. بدین سبب است که معادله خطی کلی

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

را می‌توان در حوزه اعداد حقیقی حل کرد و چنین نوشت: $x = -b/a$. ولی وضعیتی در مورد معادله درجه دوم کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال معادله درجه دوم

$$x^2 + 1 = 0$$

را در حوزه اعداد حقیقی نمی‌توان حل کرد و x را به دست آورد. مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند عددی منفی باشد. بنابراین

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0, \quad \text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x,$$

از این رو به‌ازای هر عدد حقیقی x ، معادله $x^2 + 1 = 0$ ممتنع است. در چنین وضعیتی حوزه دستگاه اعداد حقیقی را طوری توسعه می‌دهیم که چنین معادله‌ای حل‌شدنی باشد. مثلاً برای یک طفل دبستانی که فقط اعداد درست مثبت را می‌شناسد معادله‌ای مانند

$$7 + \square = 3$$

نامعقول می‌نماید. و برای کسانی که فقط اعداد صحیح را می‌شناسند معادله‌های $5x = ۱۷$ و $x^2 = ۱۷$ جواب ندارند. اما با توسیع دستگاه اعداد به صورتی که اعداد منفی، کسری و اصم را نیز در برگیرد، این معادلات به ترتیب جوابهای -۴ ، $۲/۵$ و $\pm\sqrt{۱۷}$ را خواهند داشت.

وضعیت برای معادله $x^2 + ۱ = ۰$ تقریباً همین‌طور است. دستگاه اعداد را چنان توسعه می‌دهیم تا اعدادی مثل $\sqrt{-۱}$ ، یعنی عددی را که مربعش -۱ است، نیز در برگیرد. این‌گونه اعداد با احساس شهودی ما اصلاً جور در نمی‌آیند و در گذشته بسیاری از ریاضیدانان با معرفی این‌گونه هیولاها مخالفت داشتند و از این رو آنها را اعداد انگاری نامیده‌اند. وضعیت تا سده هیجدهم به همین منوال بود تا اینکه لئونهارت اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) با کارهای استادانه روی اعداد انگاری نتایج متعدد جالبی بدست آورد. ک.ف. گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) با معرفی اعداد انگاری به صورت نقاط یک صفحه نام تازه اعداد مختلط را بر آنها نهاد و از آنها برای یافتن نتایجی چشمگیر از نظریه اعداد استفاده نمود. از این طریق عضویت اعداد مختلط را در سلسله اعداد مسجل ساخت. تقریباً در همان زمان آل. کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، هنگام تلاش در پیدا کردن روشی یکنواخت برای محاسبه انتگرالهای معین، حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع با متغیرهای مختلط را بررسی کرد. این امر سرآغاز نظریه توابعی بود که زمینه مساعدی برای کشف توابع بیضوی از سوی ن.ه. آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹) و کارل گوستاو یاکوبی (۱۸۰۴-۱۸۵۱) را فراهم ساخت. علاوه بر این، بسط هندسه تصویری نشان داد که استفاده از اعداد مختلط در هندسه نیز امری اجتناب‌ناپذیر است. پیشرفت تحقیقات روشن کرده است که برای اینکه ریاضیات، حتی فقط حساب دیفرانسیل و انتگرال را به خوبی بفهمیم، محدودیت غیرطبیعی حوزه اعداد حقیقی به ما حکم می‌کند که برای دستیابی به مفاهیم یکنواختی و همسازی، اعداد مختلط را نیز دخالت دهیم.

رسم بر این است که i ، حرف اول واژه imaginary (انگاری) را برای $\sqrt{-۱}$ به کار ببریم. بدین ترتیب اعداد مختلط اعدادی هستند به شکل $a + ib$ که a و b اعدادی هستند حقیقی و محاسبه با آنها همانند محاسبه با اعداد حقیقی است، با در نظر گرفتن اینکه به جای i^2 باید، -۱ قرار داد. مثلاً

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd$$

$$= (ac - bd) + i(bc + ad)$$

منظور از تقسیم دو عدد مختلط یعنی $(a + ib)/(c + id)$ یافتن عددی است مثل $x + iy$ که در تساوی

$$a + ib = (c + id) \cdot (x + iy)$$

صدق نماید، پس از محاسبه رابطه بالا داریم

$$a + ib = (cx - dy) + i(dx + cy)$$

پس کافی است اعداد x و y را چنان پیدا کنیم که در روابط $cx - dy = a$ و $dx + cy = b$ صدق کنند. این دستگاه معادلات یک جواب یکتای زیر را دارد.

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

مگر آنکه $c = d = 0$. بنابراین

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

البته همین نتیجه را می‌توانستیم از ضرب صورت و مخرج کسر $(a + ib)/(c + id)$ در $c - id$ نیز به دست آوریم.

اما چرا چنین اعمالی موجه‌اند؟ آیا جمع یک عدد حقیقی a با یک عدد انگاری ib و یافتن $a + ib$ همانند حاصل جمع $17m^2$ با 4 کیلوگرم و یافتن $21^\circ C$ نیست؟ همین‌طور، $x^2 + 1 = 0$ دو جواب دارد ولی i کدامیک از آنها است؟ توجه کنید که $x^2 - 1 = 0$ نیز دو جواب دارد که جواب مثبت آن 1 است و جواب دیگر آن -1 . اما آیا گفتن اینکه نامثبت است معنی دارد؟

۲.۱ تعریف اعداد مختلط

برای پاسخگویی به ایراد اخیر، اکنون تعریفی صوری از اعداد مختلط ارائه می‌دهیم. ولی ابتدا ویژگیهای دستگاه حقیقی \mathbb{R} را یادآور می‌شویم.

(i) ویژگیهای مربوط به عمل جمع
دو عدد حقیقی دلخواه a و b عدد سؤم یکتایی را معین می‌کنند به نام مجموع آنها که با $a + b$ نمایانده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

A_1 : قانون جابه‌جایی: به‌ازای هر دو عدد $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a + b = b + a$

A_2 : قانون شرکتپذیری: به‌ازای هر سه عدد $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، $(a + b) + c = a + (b + c)$

A_3 : عنصر همانی در جمع: عدد حقیقی یکتایی که با 0 نمایانده می‌شود وجود دارد چنان‌که:

به‌ازای یک مقدار $a \in \mathbb{R}$ ، $a + 0 = 0 + a = a$

A_4 : عکس جمعی: به ازای هر عدد $a \in \mathbb{R}$, منحصرأ یک عدد $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد چنانکه:

$$a + x = x + a = 0$$

این جواب یکتا را با $-a$ نمایش می دهند.

(ii) ویژگیهای مربوط به عمل ضرب

دو عدد حقیقی دلخواه a و b منحصرأ یک عدد سوّمی به نام حاصلضرب را مشخص می سازند که با ab نمایش داده می شود، با ویژگیهای زیرین:

M_1 : قانون جابه جایی: به ازای همه مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$ $ab = ba$

M_2 : قانون شرکت پذیری: به ازای همه مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(ab)c = a(bc)$

M_3 : عنصر همانی در ضرب: عدد حقیقی یکتایی وجود دارد که با 1 نمایانده می شود، به طوری که به ازای همه مقادیر

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

M_4 : عکس ضربی: به ازای هر $a \in \mathbb{R}$, با $a \neq 0$ عدد یکتایی مانند x وجود دارد چنانکه:

$$ax = xa = 1$$

این جواب یکتا را با $1/a$ یا a^{-1} نشان می دهند.

(iii) قانون توزیع پذیری

به ازای همه مقادیر $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a(b + c) = ab + ac$

هر مجموعه ای که این ویژگیها را داشته باشد، هیأت نامیده می شود. بدین ترتیب مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} , یک هیأت است. همین طور، مجموعه \mathbb{Q} مرکب از تمام اعداد گویا یک هیأت است، ولی نه مجموعه همه اعداد درست \mathbb{Z} یک هیأت تشکیل می دهند و نه مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} . در بخش قبل گفتیم اعداد مختلط به صورت $a + ib$ هستند که a و b اعدادی حقیقی اند. از این رو اساساً اعداد مختلط عبارت اند از زوج اعداد حقیقی a و b . بدین ترتیب یک تعریف رسمی به صورت زیر می آوریم.

تعریف ۱.۲.۱. یک عدد مختلط زوج مرتب (a, b) از اعداد حقیقی است با ویژگیهای زیر: دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) فقط و فقط وقتی برابرند که $a = c$ و $b = d$. مجموع و

حاصلضرب دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) چنین تعریف می‌شوند:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

توجه کنید که تعریف تساوی اعداد مختلط ویژگیهای زیر را دارد:

الف) انعکاسی: به ازای هر عدد مختلط (a, b) ، $(a, b) = (a, b)$

ب) تقارن: $(a, b) = (c, d) \iff (c, d) = (a, b)$

ج) ترابایی: $(a, b) = (c, d)$ ، $(c, d) = (e, f) \implies (a, b) = (e, f)$

قضیه ۲.۲.۱. با اعمال جمع و ضرب به صورتی که در بالا تعریف شدند، مجموعه \mathbb{C} مرکب از همه اعداد مختلط یک هیأت تشکیل می‌دهند.

برهان. یک تمرین عملی است.

حال اعداد مختلط به شکل $(a, 0)$ را در نظر می‌گیریم، پس

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \quad (b \neq 0 \text{ به شرط اینکه } b \neq 0)$$

که همانند اعمال میان دو عدد حقیقی a و b هستند. به عبارت دیگر اگر عدد مختلط $(a, 0)$ را به عنوان عدد حقیقی a در نظر بگیریم هیچگونه اختلافی پیش نخواهد آمد. در نتیجه اعداد حقیقی را اعداد مختلط خاصی می‌گیریم که مؤلفه دوم آنها صفر هستند. اکنون عدد مختلط $(0, 1)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

یعنی عدد مختلط $(0, 1)$ متناظر با $\sqrt{-1}$ در بخش قبلی است. طبیعی است که مربع $(0, -1)$ نیز -1 است، ولی چنانچه بنویسیم $i = (0, 1)$ ، آنگاه عدد مختلط دلخواه (a, b) را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$$

که توجیه‌کننده عدد مختلط $a + ib$ است.

عدد مختلط i را واحد انگاری می‌نامند. پس در هر عدد مختلط

$$\alpha = (a, b) = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

a را جزء حقیقی عدد مختلط α می‌نامند و آن را با $\Re \alpha$ نمایش می‌دهند؛ همین‌طور b را جزء انگاری عدد α خوانند و آن را با $\Im \alpha$ نشان می‌دهند. از این رو اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که جزء انگاری آنها \circ است. از سوی دیگر اعداد مختلطی را که جزء حقیقی‌شان \circ باشد اعداد انگاری محض می‌نامند. دقیقاً توجه نمایید که هر دو جزء حقیقی و انگاری اعداد مختلط، اعداد حقیقی‌اند.

برای یک عدد مختلط $\alpha = (a, b) = a + ib$ عدد مختلط $(a, -b) = a - ib$ را مزدوج مختلط α یا مزدوج عدد مختلط α می‌نامند و آن را با $\bar{\alpha}$ نمایش می‌دهند. به آسانی می‌توان روابط زیر را تحقیق نمود:

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq \circ)$$

$$\Re \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad \Im \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}$$

$$\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$$

برای هر عدد مختلط $(a, b \in \mathbb{R}) \alpha = a + ib$ حاصلضرب

$$\alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

همواره عددی حقیقی و نامنفی است. ریشهٔ دوم نامنفی این عدد را کالبد یا قدر مطلق عدد مختلط α گویند و آن را با $|\alpha|$ نمایش می‌دهند. از این رو

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = (\alpha \bar{\alpha})^{1/2}$$

قضیهٔ ۳.۲.۱. $|\alpha| = \circ$ ، اگر و فقط اگر $\alpha = \circ$.

برهان. می‌نویسیم $(a, b \in \mathbb{R})$ ، $\alpha = a + ib$ ، پس $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ بنابراین

$$|\alpha| = \circ \iff a^2 + b^2 = \circ$$

اما به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، $a^2 \geq 0$ و $b^2 \geq 0$. بنابراین

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a^2 = 0, b^2 = 0$$

$$\iff a = 0, b = 0$$

$$\iff \alpha = 0$$

توجه کنید که در اینجا ما از این واقعیت که a و b اعدادی حقیقی هستند استفاده نمودیم. در غیر این صورت $a^2 + b^2 = 0$ مستلزم تساویهای $a = b = 0$ نیست. مثلاً اگر بنویسیم $a = 1$ و $b = i$ ، آنگاه $a^2 + b^2 = 0$ ولی نه تساوی $a = 0$ برقرار است و نه تساوی $b = 0$. به آسانی می‌توان ثابت نمود که:

$$|\Re \alpha| \leq |\alpha|, \quad |\Im \alpha| \leq |\alpha|, \quad |\bar{\alpha}| = |\alpha|$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad (|- \alpha| = |\alpha| \text{ به خصوص})$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\text{به شرط } \beta \neq 0)$$

قضیه ۴.۲.۱. به ازای هر دو عدد مختلط α و β

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ یا } \beta = 0$$

و یا هم‌ارز با آن

$$\alpha\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \text{ و } \beta \neq 0$$

برهان. بنابر قضیه قبلی

$$\alpha\beta = 0 \iff |\alpha\beta| = 0$$

$$\iff |\alpha| \cdot |\beta| = 0$$

چون $|\alpha|$ و $|\beta|$ اعداد حقیقی‌اند

$$|\alpha| \cdot |\beta| = 0 \iff |\alpha| = 0 \text{ یا } |\beta| = 0$$

$$\iff \alpha = 0 \text{ یا } \beta = 0$$

توجه: در مجموعه‌ای که عمل ضرب در آن تعریف شده است، اگر $\alpha\beta = 0$ و $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ ، آنگاه α, β را مقسوم‌علیه‌های صفر گویند. قضیه قبلی می‌بیند که هیأت اعداد مختلط \mathbb{C} مقسوم‌علیه صفر ندارد.

دستگاههایی جبری وجود دارند که مقسوم‌علیه‌های صفر دارند. به‌طور مثال مجموعه همه ماتریسهای 2×2 به‌صورت

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. جمع و ضرب در این مجموعه به‌ترتیب چنین تعریف می‌شوند

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

عنصر صفر عبارت‌است از

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس با اینکه

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

ولی داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

باید توجه داشت که در اثبات این قضیه از این موضوع استفاده شده است که هیأت اعداد حقیقی \mathbb{R} ، مقسوم‌علیه صفر ندارد.

۳.۱ معادله‌های درجه دوم

چنان‌که در بخش ۲.۱ دیدیم عدد مختلط $i = (0, 1)$ در معادله $x^2 + 1 = 0$ صدق می‌کند. اما درباره سایر معادله‌های درجه دوم چه بگوییم؟ آیا آنها در \mathbb{C} جواب دارند؟ آیا باید به افزودن اعضای جدید به دستگاه عددی خود ادامه دهیم؟ به معادله زیر توجه نمایید

مثال. به یافتن ریشه‌های معادله زیر می‌پردازیم

$$\frac{1}{4}x^2 + (1+i)x - i = 0$$

حل. از نوشتن این معادله به صورت یک مربع کامل خواهیم داشت

$$\{x + (1+i)\}^2 = 2i + (1+i)^2 = 4i$$

$$\therefore x + (1+i) = \pm 2\sqrt{i}$$

$$x = -(1+i) \pm 2\sqrt{i}$$

اما ریشه دوم عدد i چیست؟ عددی است که باید مربعش i شود. پس می‌نویسیم

$$u + iv = \sqrt{i} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

سپس با مربع نمودن دو طرف خواهیم داشت

$$(u^2 - v^2) + 2uvi = i$$

$$\therefore u^2 - v^2 = 0, \quad uv = \frac{1}{2}$$

از معادله اول، $u = \pm v$ به دست می‌آید و با قرار دادن $u = v$ در معادله دوم خواهیم داشت

$$u = v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و از آنجا

$$\sqrt{i} = u + iv = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

حالت $u = -v$ پیش نخواهد آمد، زیرا منجر به تساوی $u^2 = -1/2$ می شود که به ازای مقدار حقیقی u ناممکن است.^۱ از اینجا نتیجه می شود که

$$x = -(1+i) \pm \sqrt{2}(1+i) = (-1 \pm \sqrt{2})(1+i)$$

بنابراین برای حل این معادله درجه دوم لزومی ندارد که دستگاه اعداد مختلط را توسعه دهیم. خواننده باید صدق نمودن نتایج به دست آمده را در معادله درجه دوم مذکور عملاً تحقیق نماید. اکنون صورت کلی معادله درجه دوم را مورد مطالعه قرار می دهیم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

چون دستگاه عددی خود را به اعداد مختلط توسعه داده ایم باید حالت $a, b, c \in \mathbb{C}$ را مورد بحث قرار دهیم. چون تا آنجا که به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم مربوط می شود، اعداد مختلط از همان قواعد اعداد حقیقی تبعیت می کنند، از تقسیم طرفین معادله بالا بر a و تکمیل مربع، مانند حالت با ضرایب حقیقی، خواهیم داشت

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

و با قرار دادن

$$\zeta = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{و} \quad z = x + \frac{b}{2a}$$

مسئله بر می گردد به اینکه ببینیم آیا معادله $z^2 = \zeta$ را می توان به ازای عدد مختلط دلخواه ζ حل نمود یا نه؟ اگر قرار دهیم

$$z = u + iv \quad \zeta = \alpha + i\beta$$

می توان مسئله را چنین بیان کرد: آیا همواره می توانیم دو عدد حقیقی u و v چنان پیدا کنیم که به ازای دو عدد حقیقی دلخواه α و β تساوی زیر برقرار باشد.

$$(u + iv)^2 = \alpha + i\beta$$

۱. با صرف نظر نمودن از حقیقی بودن u به حل معادله $u^2 = -\frac{1}{2}$ می پردازیم و چنین به دست می آوریم $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $v = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}i$ بدین ترتیب $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $v = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $\sqrt{-1} = u + iv = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i(1 - i) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ، که همان نتیجه قبلی به دست آمد.

$$(u^2 - v^2) + 2iuv = \alpha + i\beta$$

بدین ترتیب مسأله به حل دستگاه معادلات
$$\begin{cases} u^2 - v^2 = \alpha \\ 2uv = \beta \end{cases}$$
 تبدیل می‌شود.

چون

$$(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

و $u^2 + v^2 \geq 0$ و $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ ($\because u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) خواهیم داشت:

$$u^2 + v^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$u^2 = \frac{1}{2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right), \quad v^2 = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

با توجه به

$$\frac{1}{2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \geq 0, \quad \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \geq 0$$

داریم

$$u = \pm \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2} \quad \text{و} \quad v = \pm \left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2}$$

که باید علامتها را چنان اختیار کرد که در تساوی $2vu = \beta$ صدق نماید. یعنی ریشه دوم

$\sqrt{\zeta} = u + iv$ چنین به دست می‌آید

$$\sqrt{\zeta} = \begin{cases} \pm \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2} + i \left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2} \right) & \beta > 0 \text{ به‌ازای} \\ \pm \left(- \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2} + i \left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \right)^{1/2} \right) & \beta < 0 \text{ به‌ازای} \\ \pm \sqrt{\alpha}, & \beta = 0 \text{ و } \alpha \geq 0 \text{ به‌ازای} \\ \pm i\sqrt{-\alpha}, & \beta = 0 \text{ و } \alpha < 0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

پس نشان دادیم که هر عدد مختلط (ناصفر) دو تا ریشهٔ دوم دارد. توجه: به‌ازای $\xi \in \mathbb{R}$ ، برای نمایش ریشهٔ دوم نامنفی آن هنگامی که $\xi \geq 0$ ، از $\sqrt{\xi}$ و هنگامی که $\xi < 0$ ، از $\sqrt{\xi} = i\sqrt{-\xi} (= i\sqrt{|\xi|})$ استفاده شده است. ولی از این پس، برای یک عدد مختلط غیرحقیقی ξ ، قرارداد $\sqrt{\xi}$ ، صرفاً به معنی ریشهٔ دوم ξ است و معرّف جذر عدد خاص دیگری نیست.

با توجه به قرارداد بالا هنگامی که ξ و η اعداد حقیقی منفی هستند، تساوی

$$\sqrt{\xi} \cdot \sqrt{\eta} = \sqrt{\xi \cdot \eta}$$

دیگر معتبر نیست و زمانی معتبر است که دو طرف تساوی را مجموعه‌های اعداد مختلط بگیریم.

پس قضیهٔ زیرین را اثبات کردیم
قضیهٔ ۱.۳.۱. معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

در \mathbb{C} دو ریشه دارد که چنین‌اند

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

۴.۱ اهمیت اعداد مختلط

در بخش قبل دیدیم که هر معادلهٔ درجهٔ دوم در هیأت اعداد مختلط \mathbb{C} جوابهایی دارد. اما در مورد معادله‌های درجهٔ سوم، درجهٔ چهارم و غیره چه؟ آیا هر بار که با معادله‌های درجهٔ بالا سروکار

داریم باید دستگاه اعداد را توسعه دهیم؟ یکی از زیباییهای دستگاه اعداد مختلط در معتبر بودن قضیه زیر است.

قضیه ۱.۴.۱. (قضیه بنیادی جبر). معادله چندجمله‌یی:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

که در آن $a_k \in \mathbb{C}$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ ، و $a_0 \neq 0$ ، و $n \geq 1$ ، در \mathbb{C} جواب دارد. به عبارت دیگر

\mathbb{C} از لحاظ جبری بسته است

معادله بالا را معادله چندجمله‌یی از درجه n (هنگامی که $a_0 \neq 0$) گویند. از قضیه بنیادی جبر نتیجه می‌شود که:

فرع ۲.۴.۱. معادله چندجمله‌یی، درجه n ، با احتساب ریشه‌های مکرر n ریشه در \mathbb{C} دارد.

مثال. معادله درجه سوم $z^3 + i = 0$ را حل کنید.

حل. می‌نویسیم $z = u + iv$, $(u, v \in \mathbb{R})$. پس، چون

$$(u + iv)^3 = u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3$$

باید داشته باشیم

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3u^2v - v^3 + i = 0 \end{cases}$$

از معادله اول نتیجه می‌شود

$$u(u^2 - 3v^2) = 0$$

پس

$$u^2 - 3v^2 = 0 \quad \text{یا} \quad u = 0$$

وقتی $u = 0$ ، از معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$v^3 - i = 0 \quad (v - i)(v^2 + v + i) = 0$$

چون $v \in \mathbb{R}$ ، $v^2 + v + 1 \neq 0$ ، لذا $v = 1$ و $z = i$ \therefore هنگامی که $u^2 - 3v^2 = 0$ ، $u = \pm\sqrt{3}v$ از قرار دادن این مقدار در معادلهٔ دوم خواهیم داشت

$$8v^3 + 1 = 0 \quad \text{یعنی} \quad 3(\pm\sqrt{3}v)^2 v - v^3 + 1 = 0 \\ \therefore (2v + 1)(4v^2 - 2v + 1) = 0$$

چون $v \in \mathbb{R}$ ، $4v^2 - 2v + 1 \neq 0$ و لذا $v = -1/2$ پس

$$u = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

بنابراین سه ریشه به دست می آید

$$z = i, \quad \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

گ. ف گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) در رساله اش چندین استدلال برای قضیه بنیادی جبر داده است. خوانندگان علاقه مند به این استدلالها می توانند به کتابهای درسی استاندارد در آنالیز مختلط مانند: آنالیز مختلط اثر پاک و نیومن^۱ و جاذبه های آنالیز مختلط اثر بوآز^۲ مراجعه نمایند.

باید توجه داشت که قضیه بنیادی جبر به وجود جوابها در \mathbb{C} حکم می کند ولی از چگونگی پیدا کردن آنها صحبتی به میان نمی آورد. درواقع هیچ گونه دستور جبری کارساز برای یک چندجمله ای غیرمشخصی از درجهٔ ۵ (یا بالاتر) وجود ندارد.

۵.۱ رابطه ترتیبی در هیأت اعداد مختلط

همواره می توانیم اندازهٔ دو عدد حقیقی را با هم مقایسه کنیم. یعنی در دو عدد مفروض $a, b \in \mathbb{R}$ ، یا $a > b$ ، یا $a = b$ ، و یا $a < b$. اما آیا می توان این قضیه را برای اعداد مختلط هم تعمیم داد؟ برای پاسخگویی به این سؤال ابتدا رابطه ترتیبی در \mathbb{R} را دوباره بررسی می کنیم.

P_1 . (سه حالتی) به ازای هر عدد $a \in \mathbb{R}$ فقط و فقط یکی از سه رابطه زیر برقرار است

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

1. J. Bak and D. J. Newman's *Complex Analysis* [Springer-Verlag, New York, 1982].
2. R. P. Boas's *Invitation to Complex Analysis* [Random House, New York, 1987].

به ازای جمیع مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$a > b \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad a - b > 0$$

در این صورت P_1 هم‌ارز است با این حکم که به ازای جمیع مقادیر $a, b \in \mathbb{R}$ فقط و فقط یکی از سه رابطه زیر برقرار است

$$a > b, \quad a = b, \quad b > a$$

علاوه بر این رابطه ترتیبی در \mathbb{R} در احکام زیرین صدق می‌نماید.

$$P_1. \quad a > 0, b > 0 \implies a + b > 0$$

$$P_2. \quad a > 0, b > 0 \implies ab > 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که همه ویژگیهای رابطه ترتیبی در \mathbb{R} مانند:

$$a > b, b > c \implies a > c$$

$$a > b, c > 0 \implies ac > bc$$

$$a > b, c < 0 \implies ac < bc$$

از قطعی بودن اصلهای موضوع P_1, P_2 و P_3 نتیجه می‌شوند. به عبارت دیگر یک رابطه ترتیبی فقط هنگامی مفید واقع می‌شود که هر سه اصل موضوع P_1, P_2, P_3 برقرار باشند.

قضیه ۱.۵.۱. رابطه ترتیبی در \mathbb{R} را می‌توان برای \mathbb{C} چنان تعمیم داد که P_1 و P_2 در آن برقرار باشد، ولی برقراری P_3 در آن ممکن نیست.

برهان. به ازای $(a, b \in \mathbb{R}), \alpha = a + ib$ ، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha > 0 \iff \begin{cases} a > 0, \\ \text{یا} \\ a = 0 \text{ و } b > 0 \end{cases}$$

P_1 . به ازای هر عدد مختلط $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)، فقط باید یکی از رابطه‌های زیر

برقرار باشد:

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

$$\begin{aligned} a > 0 &\implies \alpha > 0 \quad \text{الف} \\ -a > 0 &\implies -\alpha > 0 \quad \text{ب) اگر} \end{aligned}$$

$$a = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 0 \implies \alpha > 0 \\ b = 0 \implies \alpha = 0 \\ -b > 0 \implies -\alpha > 0 \end{array} \right. \quad \text{ج) اگر}$$

پس ثابت کردیم که به ازای هر مقدار $\alpha \in \mathbb{C}$ فقط و فقط یکی از احکام زیر برقرار است:

$$\alpha > 0, \quad \alpha = 0, \quad -\alpha > 0$$

P_2 . فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ و $\alpha' > 0$ و

$$(a, b, a', b' \in \mathbb{R}) \quad \alpha' = a' + ib' \quad , \alpha = a + ib$$

پس

$$\{a = 0 \text{ و } b > 0\} \text{ یا } a > 0$$

$$\{a' = 0 \text{ و } b' > 0\} \text{ یا } a' > 0$$

باید همه ترکیبهای این حالتها را بررسی کنیم

$$a > 0, a' > 0 \implies a + a' > 0 \implies \alpha + \alpha' > 0 \quad \text{الف)}$$

$$a > 0, \{a' = 0 \text{ و } b' > 0\} \implies a + a' > 0 \implies \alpha + \alpha' > 0 \quad \text{ب)}$$

$$a' > 0, \{a = 0 \text{ و } b > 0\} \implies a + a' > 0 \implies \alpha + \alpha' > 0 \quad \text{ج)}$$

$$\text{د) بالاخره } \{a = 0 \text{ و } b > 0\} \text{ و } \{a' = 0 \text{ و } b' > 0\}, \text{ در این صورت } a + a' = 0 \text{ و } b + b' > 0 \text{ لذا } \alpha + \alpha' > 0.$$

P_2 . فرض می‌کنیم رابطه ترتیبی در \mathbb{R} را برای \mathbb{C} چنان بسط داده باشیم که اصل P_2 را محفوظ داشته باشد. بنابراین، چون $i \neq 0$ ، به موجب P_1 باید داشته باشیم: $i > 0$ یا $-i > 0$. اگر $i > 0$ ، بنابر P_2 باید داشته باشیم $i \cdot i > 0$ و این به معنی $-1 > 0$ ، و این ممنوع است. همین طور اگر $-i > 0$ ، باز بنابر P_2 باید داشته باشیم $(-i) \cdot (-i) > 0$ که مجدداً به نتیجه ممنوع $-1 > 0$ می‌رسیم. ■

توجه: در عمل به راههای زیادی می‌توان رابطه ترتیبی در \mathbb{C} را چنان تعریف نمود که P_1 و P_2 برقرار باشند. در اینجا ما راه ترتیب القبایی قاموسی را اختیار نمودیم. در نتیجه برای اعداد غیرحقیقی (مختلط) نامساویهایی نظیر $<$ یا \geq را به کار نخواهیم برد.

۶.۱ نابرابری مثلثی

در بخشهای ۱ و ۲ قدرمطلق عدد مختلط $\alpha = a + ib$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$ ، را چنین تعریف کردیم

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

و به چند ویژگی ساده قدرمطلق اشاره کردیم: اکنون نابرابری مثلثی را که مهم است اثبات می‌کنیم
قضیه ۱.۶.۱. (نابرابری مثلثی). به ازای جميع مقادیر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

برهان.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \quad (\because \Re\alpha \leq |\alpha|, \alpha \in \mathbb{C} \text{ به ازای}) \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \quad (\because |\bar{z}_2| = |z_2|) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

چون $|z_1 + z_2|$ و $|z_1| + |z_2|$ هر دو نامنفی‌اند خواهیم داشت

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

برای اثبات نابرابری دیگر باید توجه کرد که $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$

$$\begin{aligned} \therefore |z_1| &= |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \\ &= |z_1 + z_2| + |z_2| \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$$

با تعویض نقشهای z_1 و z_2 خواهیم داشت

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

$$\therefore ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

■ اکنون حالت تساوی را در نابرابری مثلثی در نظر می‌گیریم. حالت $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$ بدیهی است. از این رو حالتی را در نظر می‌گیریم که $z_1, z_2 \neq 0$. با مراجعه به برهان بالا ملاحظه می‌کنیم که تساوی هنگامی به دست می‌آید که

$$\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$$

اما یک عدد مختلط α فقط و فقط وقتی در تساوی $\Re \alpha = |\alpha|$ صدق می‌کند که α عدد حقیقی نامنفی باشد. پس نامساوی فوق فقط و فقط هنگامی به تساوی بدل می‌شود که

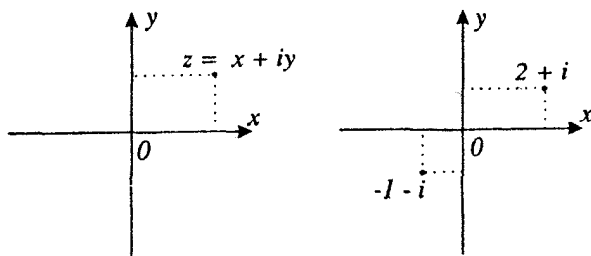
$$z_1 \bar{z}_2 \geq 0$$

چون فرض کردیم $z_2 \neq 0$ ، از تقسیم طرفین این تساوی بر $|z_2|^2 (= z_2 \bar{z}_2 > 0)$ خواهیم داشت $z_1 / z_2 \geq 0$.

گفته‌های خود را خلاصه کنیم، تساوی $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ فقط و فقط هنگامی برقرار است که $z_1 / z_2 > 0$ یا $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$. به عبارت دیگری از دو مقدار z_1 و z_2 باید دارای این ویژگی باشد که مضرب مثبتی از دیگری باشد. یک برهان دیگر از این حکم را در انتهای بخش ۸.۱، نمایش قطبی اعداد مختلط، خواهیم آورد. دلیل نام «نابرابری مثلثی» در بخش بعدی روشن خواهد شد.

۷.۱ صفحه مختلط

عدد مختلط را به صورت زوج مرتب اعداد حقیقی تعریف کردیم. اما مجموعه همه زوجهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک با نقاط (x, y) صفحه \mathbb{R}^2 دارد. بنابراین طبیعی است که یک عدد مختلط $z = x + iy$ را متناظر نقطه (x, y) در صفحه \mathbb{R}^2 بگیریم.



شکل ۱.۱

در تناظر بالا عدد حقیقی $x = x + i \cdot 0$ متناظر با نقطه $(x, 0)$ روی محور x ها و عدد انگاری محض $iy = 0 + iy$ با نقطه $(0, y)$ روی محور y ها متناظر می شود. از این رو محور x ها را محور حقیقی و محور y ها را محور انگاری نامیده اند. صفحه ای که مجهز به محورهای حقیقی و انگاری باشد، صفحه مختلط یا صفحه گاوس نامیده می شود.

اکنون به حاصل جمع اعداد مختلط در صفحه مختلط \mathbb{C} می پردازیم:

فرض کنید

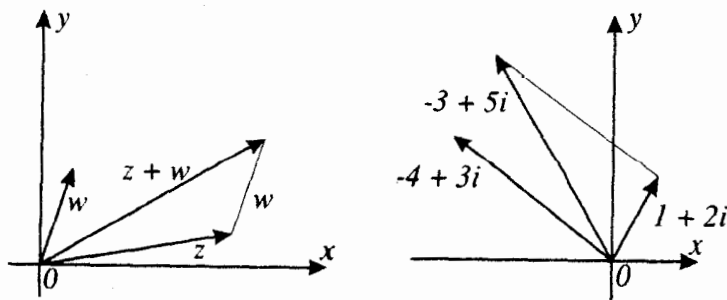
$$z = x + iy, \quad w = u + iv \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

پس

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

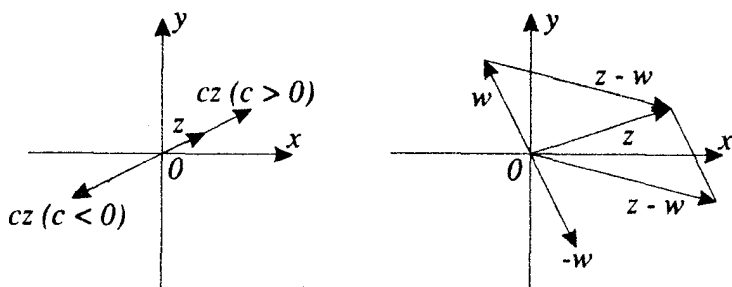
این رابطه، این مطلب را به ذهن القا می کند که بهتر است اعداد مختلط را به صورت بردار در نظر بگیریم. یعنی عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری در نظر بگیریم که مبدأش، مبدأ مختصات و منتهایش عدد مختلط $z = x + iy$ باشد. به عبارت دیگر عدد مختلط $z = x + iy$ را برداری در نظر بگیریم که تصاویر قائم آن بر محورهای مختصات x و y باشند. طبیعی است که نظیر همین ملاحظات در مورد عدد مختلط w نیز صادق است. بدین ترتیب مجموع $z + w$ برداری است متناظر با قطر متوازی الاضلاعی (به مبدأ مرکز مختصات) که بر دو بردار z و w ساخته می شود. این گفته هم ارز است با رسم بردار z از مبدأ مختصات و سپس رسم بردار w که مبدأش در منتهای z باشد. در این صورت برداری که ابتدایش مبدأ مختصات و منتهایش انتهای w است، نمایش بردار $z + w$ خواهد بود. (→ شکل ۲.۱)

از این پس، هر عدد مختلط را با یک نقطه یا یک بردار در صفحه مختلط (هر کدام که در موقعیت خاص مناسبتر باشد) مشخص می سازیم.



شکل ۲.۱

اکنون مضرب حقیقی از یک عدد مختلط را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $z = x + iy$ و $c \in \mathbb{R}$ داریم $cz = cx + icy$. در این صورت اگر $c > 0$ ، اصلاً طول بردار را در c ضرب می‌کنیم (در همان جهت). در صورتی که $c < 0$ ، طول بردار را در $|c|$ ضرب و بردار را در جهت مخالف رسم می‌کنیم.



شکل ۳.۱

به‌خصوص، چون $-w = (-1)w$ ، خواهیم داشت:

$$z - w = z + (-w)$$

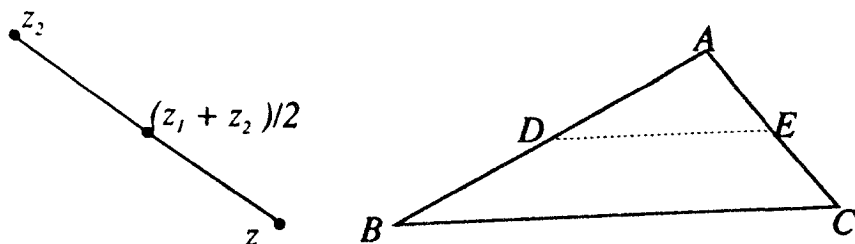
یعنی برای یافتن بردار $-w$ ، ابتدا جهت بردار w را عکس می‌کنیم و مبدأ بردار $-w$ را انتهای z می‌گیریم. بدین ترتیب برداری که مبدأش، مبدأ z و انتهایش، انتهای $-w$ است، $z - w$ را نمایش خواهد داد. به عبارت دیگر بردار $z - w$ برداری است که مبدأ آن منتهای w و منتهای آن، منتهای z باشد. (به شرط آنکه z و w یک مبدأ داشته باشند). باید توجه کرد که $z + w$ و $z - w$ دو قطر متوازی‌الاضلاع‌ای هستند که \vec{Oz} و \vec{Ow} دو ضلع مجاور آن هستند.

مثال ۱. فرض کنید z_1 و z_2 دو نقطه در صفحه مختلط باشند. پس وسط پاره خطی که دو نقطه z_1 و z_2 را به هم وصل می‌کند،

$$z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

خواهد بود.

مثال ۲. در مثلث دلخواه $\triangle ABC$ ، اگر نقاط D و E را به ترتیب وسطهای اضلاع AB و AC بگیریم، DE موازی ضلع BC و طولش نصف طول BC خواهد شد.



شکل ۴.۱

حل. فرض کنید $\triangle ABC$ در صفحه مختلط داده شده است، و z_1 ، z_2 و z_3 به ترتیب اعداد مختلط متناظر با رأسهای A ، B و C هستند. در این صورت، وسطهای اضلاع AB ، AC یعنی D و E به ترتیب متناظر با $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ و $\frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ خواهند شد. بنابراین بردار \overrightarrow{DE} با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_3) - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(z_3 - z_2)$$

اما $z_3 - z_2$ دقیقاً بردار \overrightarrow{BC} و بنابراین نتیجه حاصل است.

مثال ۳. نقطه z واقع بر پاره خط واصل بین نقاط z_1 و z_2 که این فاصله را به نسبت m/n تقسیم می کند با تساوی زیر داده می شود

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m}$$

که در آن m و n اعداد حقیقی مثبت اند. زیرا به آسانی می توان دید که

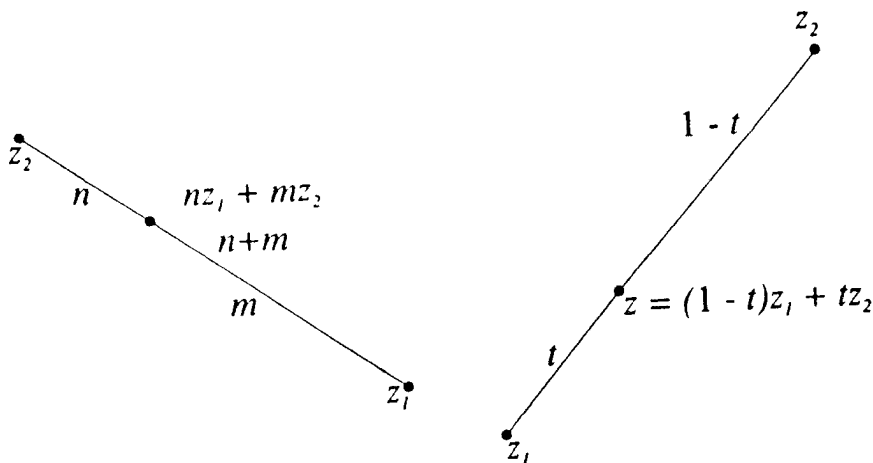
$$\frac{z - z_1}{m} = \frac{z_2 - z}{n}$$

که این رابطه مطلوب را می دهد.

با بیانی هم ارز با بیان بالا، اگر z را نقطه ای دلخواه روی پاره خطی که نقاط z_1 و z_2 را به هم وصل می کند بگیریم، آنگاه به ازای مقداری از $t \in \mathbb{R}$ ، $(0 < t < 1)$ ، داریم

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

$$\therefore z = (1 - t)z_1 + tz_2 \quad (0 < t < 1)$$



شکل ۵.۱

به عکس، فرض کنید این رابطه برقرار باشد. پس چون استدلال مذکور دوسویی است، می توان نتیجه گرفت که z باید نقطه ای بر پاره خطی در صفحه مختلط باشد، که z_1 و z_2 را به هم وصل می کند.

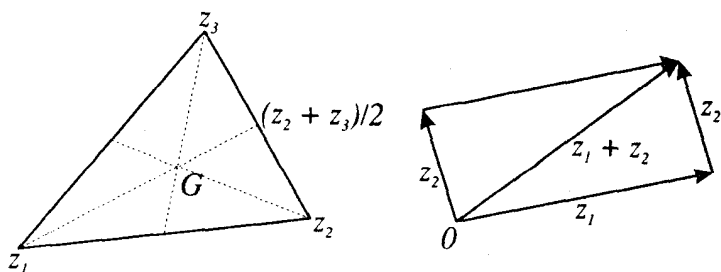
مثال ۴. فرض کنید z_1, z_2 و z_3 سه نقطه دلخواه در صفحه مختلط باشند. پس وسط پاره خط واصل بین نقاط z_2 و z_3 نقطه $(z_2 + z_3)/2$ است و بنابراین معادله پارامتری میانه ماز بر رأس z_1 از $\Delta z_1 z_2 z_3$ چنین است

$$z = (1-t)z_1 + t \cdot \frac{z_2 + z_3}{2} \quad (0 < t < 1)$$

پس نقطه ای که این میانه را به طور درونی به نسبت $2/1$ تقسیم می کند با قرار دادن $t = 2/3$ در عبارت بالا به دست می آید، یعنی

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

اما این عبارت نسبت به z_1, z_2 و z_3 متقارن است، و لذا این نقطه میانه های ماز از رئوس z_2 و z_3 را نیز به طور درونی به نسبت $1/2$ تقسیم می نماید. بنابراین سه میانه مثلث دلخواه در یک نقطه متقاطع اند. این نقطه را مرکزوار یا مرکز ثقل $\Delta z_1 z_2 z_3$ گویند.



شکل ۶.۱

به ازای $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)، قدر مطلق z را چنین تعریف می‌کنیم.

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

یعنی، $|z|$ طول بردار z است. به عبارت دیگر $|z|$ فاصله z از مبدأ مختصات است، که با حالتی که z حقیقی باشد توافق دارد.

باید توجه کرد که $|z_1|$ ، $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ طولهای سه ضلع یک مثلث‌اند و لذا نام نابرابری مثلثی (قضیه ۱.۶.۱)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

نامی است با مستی. از لحاظ هندسی روشن است که این نابرابری فقط هنگامی به تساوی تبدیل می‌شود که مثلث به پاره‌خط بدل شود. به این موضوع در انتهای بخش بعد باز خواهیم گشت.

۸.۱ نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی

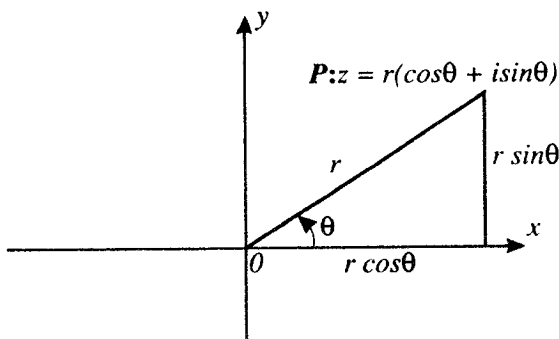
تا اینجا فقط جنبه برداری اعداد مختلط را به کار گرفته‌ایم و به قدرت واقعی اعداد مختلط توجهی نکرده‌ایم. عمل ضرب برای اعداد مختلط عملی است خوشترریف. در صورتی که برای بردارها چنین نیست. حاصلضرب نقطه‌ای (حاصلضرب داخلی) دو بردار، یک عددوار است نه یک بردار، در صورتی که ضرب خارجی دو بردار واقع در یک صفحه برداری است که دیگر در این صفحه نیست. (ضرب خارجی فقط در فضای سه‌بعدی مفید است.) اساس کاربرد اعداد مختلط در هندسه مسطحه بر این واقعیت استوار است که حاصلضربهای اعداد مختلط، اعدادی هستند مختلط.

برای ضرب اعداد مختلط بجاست که از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده کنیم. برای نقطه‌ای مانند $(P = x + iy)$ یا $P = (x, y)$ در صفحه مختصات، بردار \overrightarrow{OP} (مبدأ O) مختصات) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید θ زاویه بین \overrightarrow{OP} و جهت مثبت محور x ها باشد و پس $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$.

طبیعی است که θ با تقریب به پیمانه 2π یعنی θ تعیین می‌شود. یعنی، اگر از اختلاف مضرب صحیح 2π صرف‌نظر کنیم، θ به‌طور یکتا تعیین می‌شود. زاویه θ را شناسه عدد مختلط z می‌گویند.

در سراسر این کتاب همواره تساویهایی که متضمن شناسه باشند همنهشت به پیمانه 2π به‌حساب می‌آیند، مگر آنکه به‌صراحت خلاف آن عنوان شود، یعنی اختلاف مضارب 2π نادیده گرفته شود.

(r, θ) را مختصات قطبی نقطه P می‌گویند.



شکل ۷.۱

مبدأ مختصات نقطه منحصر به فردی است که در آن $r = 0$. شناسه θ در مبدأ مختصات تعریف نشده است.

اگر $z = x + iy$ ($z \neq 0$)، نمایش قطبی z را می‌توانیم چنین بنویسیم.

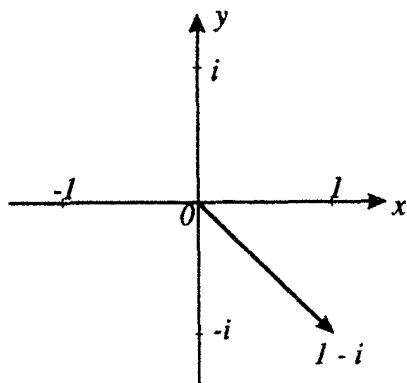
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

یعنی $\theta = \arg z$, $r = |z|$ معرف شناسه z است.

مثال ۱. به‌ازای $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,

$$z \iff \arg z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$z \iff \arg z = \pm \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$



شکل ۸.۱

مثال ۲.

$$\begin{aligned} |-1| &= 1, & \arg(-1) &= (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}); \\ |i| &= 1, & \arg(i) &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}); \\ |1-i| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, & \arg(1-i) &= -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

مثال ۳. فرض کنید $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

پس

$$|\omega| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

قرار می‌دهیم $\theta = \arg \omega$ در این صورت

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

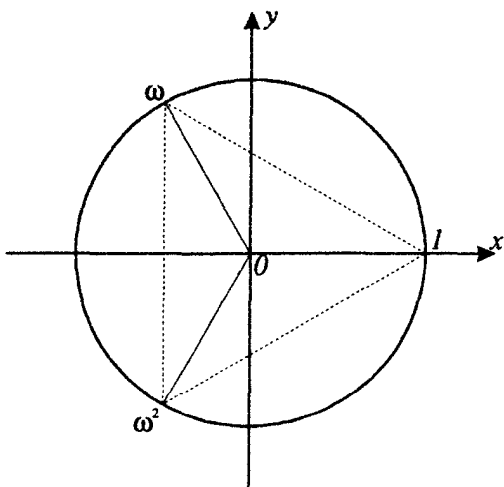
لذا $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ به علاوه

$$|\bar{\omega}| = 1, \quad \arg \bar{\omega} = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

توجه داشته باشید که

$$\omega^2 = \bar{\omega}, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1$$

نقاط ω و ω^2 به انضمام ۱، سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره واحد را تشکیل می‌دهند.



شکل ۹.۱

نمایش قطبی برای ضرب اعداد مختلط به علت زیر مناسب است:
قضیه ۱.۸.۱. فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

در این صورت

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

یعنی

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

به عبارت دیگر، قدرمطلق حاصلضرب، مساوی حاصلضرب قدرمطلقها و شناسه حاصلضرب مساوی مجموع شناسه‌هاست.

برهان. بنا بر فرمولهای جمع داریم

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &\quad + i (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$

توجه: با محدود نمودن شناسه z به بازه $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ شناسه z به ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ (بجز $z = 0$) به طور یکتا مشخص می‌شود، ولی در این صورت رابطه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

معتبر نخواهد بود و $\arg z$ تابعی پیوسته از z نخواهد شد.

فرع ۲.۸.۱

$$\begin{aligned} |z_1 z_2 \dots z_n| &= |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \\ \arg(z_1 z_2 \dots z_n) &= \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n \end{aligned}$$

فرع ۳.۸.۱. (دموآور). به ازای $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ و $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

یعنی

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$$

برهان. فقط حالت $n = -1$ را ثابت می‌کنیم. داریم

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

از تقسیم دو طرف این تساوی بر $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} &= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}\end{aligned}$$

زیرا $\cos(-\theta) = \cos \theta$ و $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\therefore |z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \arg(z^{-1}) = -\arg(z)$$

۴.۸.۱. فرع

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

(به شرط $z_2 \neq 0$)

مثال ۱. از فرمول دوموآور می‌توان فرمولهای توابع سینوس و کسینوس را استخراج نمود. اگر در آن فرمول r را مساوی ۱ بگیریم، خواهد شد:

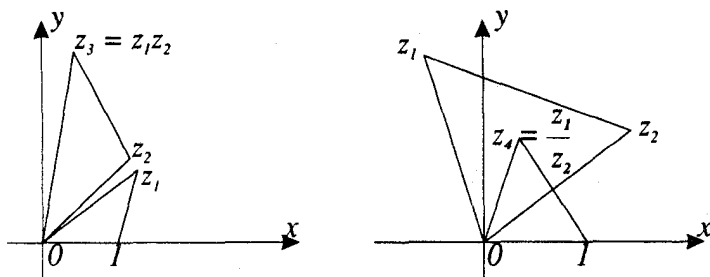
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

بویژه به‌ازای $n = 3$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \cdot \sin^2 \theta) + i (3 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta - \sin^3 \theta) \\ \therefore \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \cdot \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \cdot \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta\end{aligned}$$

این قضیه می‌گوید که ضرب در z در صفحه مختلط به معنی بزرگ کردن (یا کوچک کردن) شکل به وسیله ضرب در عامل $|z|$ ، و دوران آن (پادساعتسو) به زاویه $\arg z$ است. به‌ویژه ضرب در i ، یعنی دوران (پادساعتسو) به زاویه $\pi/2$ است.

با این مقدمات، اگر نقاط z_1 و z_2 در صفحه مختلط داده شده باشند، می‌توانیم حاصلضرب $z_2 = z_1 z_2$ را به‌طور هندسی رسم کنیم. آنچه که باید توجه کنیم این است که $\triangle O z_2 z_2$ و $\triangle O z_1 z_1$ متشابه (و هم‌جهت) اند.



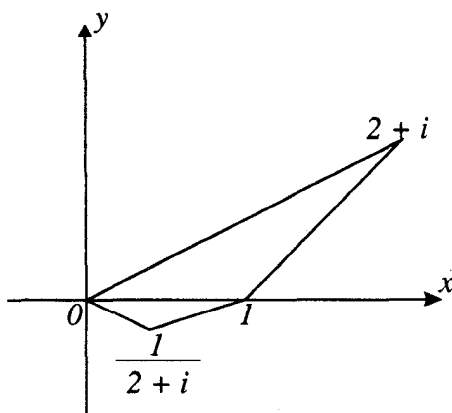
شکل ۱۰.۱

همچنین برای رسم خارج قسمت $z_2 = (z_1/z_2)$ از راه هندسی، کافی است توجه کنیم که $\triangle O z_2 z_1$ و $\triangle O z_2 z_1$ متشابه (و هم جهت) اند.

مثال ۲. مطلوب است نمایش هندسی $1/(2+i)$. فرض کنید $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 1/(2+i)$. پس $\triangle O z_2 z_1$ و $\triangle O z_2 z_1$ متشابه (و هم جهت) اند و z_2 را طبق شکل ۱۱.۱ رسم می‌کنیم.

اکنون به حالتی برمی‌گردیم که نابرابری مثلثی (قضیه ۱.۶.۱)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



شکل ۱۱.۱

به تساوی بدل می‌شود. با بررسی برهان متوجه می‌شویم که تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می‌شود که یکی از شرایط هم ارز زیر برقرار باشد:

- (۱) $\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$
- (۲) $z_1 \bar{z}_2$ عدد حقیقی نامنفی باشد.
- (۳) z_1/z_2 عدد حقیقی مثبتی باشد یا $z_1 z_2 = 0$.
- (۴) z_1 و z_2 یک شناسه (به پیمانه 2π) داشته باشند.
- (۵) z_1 و z_2 بر یک شعاع که از مبدأ مختصات رسم می‌شود قرار داشته باشند.
- (۶) بردارهای $\overrightarrow{Oz_1}$ و $\overrightarrow{Oz_2}$ یک امتداد داشته باشند.

۹.۱ ریشه‌های n ام عدد ۱

دایرهٔ یکه (دایرهٔ به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱) را می‌توان چنین بیان کرد

$$|\zeta| = 1 \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

برحسب نمایش قطبی می‌توان آن را چنین نوشت

$$|\zeta| = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

به‌ازای این ζ ، اگر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$|\zeta z| = |\zeta| \cdot |z| = |z|, \quad \arg(\zeta z) = \arg \zeta + \arg z$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ضرب در ζ فقط به معنی دور z حول مبدأ مختصات است به زاویه $\theta (= \arg \zeta)$.

فرض کنید $z = x + iy$ ، $\zeta z = x' + iy'$. پس

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) \\ \therefore x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

که این عمل یک تبدیل خطی را تداعی می‌کند. چنانچه $x + iy$ و $x' + iy'$ را به ترتیب بردارهای $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ بگیریم، روابط بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

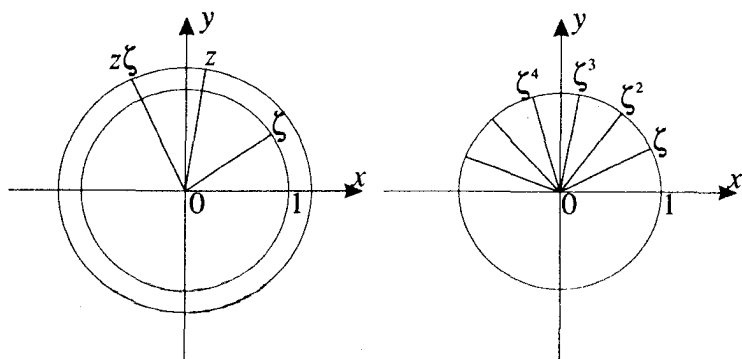
به عکس، چنانچه این روابط برقرار باشد، آنگاه

$$x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy)$$

و لذا ضرب $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta$ در $z = x + iy$ درست همان ضرب ماتریس دوران

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

در بردار $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ است.



شکل ۱۲.۱

مثال ۱. برای $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta$ ، ζ^2 از دوران ζ به زاویه θ به دست می‌آید، یک دوران دیگر به زاویه θ ، ζ^2 را نتیجه می‌دهد و قس علیهذا.

مثال ۲. برای $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، α^2 از دوران α به زاویه θ و بزرگ نمودن (یا کوچک نمودن) طول آن از راه ضرب در r به دست می‌آید.

مثال ۳. اکنون می‌خواهیم همه ریشه‌های سوم عدد ۱ را پیدا کنیم. یعنی می‌خواهیم معادله $z^3 = 1$ را حل کنیم.

می‌نویسیم $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. در این صورت به موجب فرمول دموآور داریم:

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1$$

$$\therefore r^3 = 1, \quad \cos 3\theta + i \sin 3\theta = 1$$

چون r یک عدد حقیقی مثبت است خواهیم داشت:

$$r = 1, \quad \cos 3\theta = 1, \quad \sin 3\theta = 0$$

$$\therefore 3\theta = 2k\pi; \quad \text{یعنی,} \quad \theta = \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

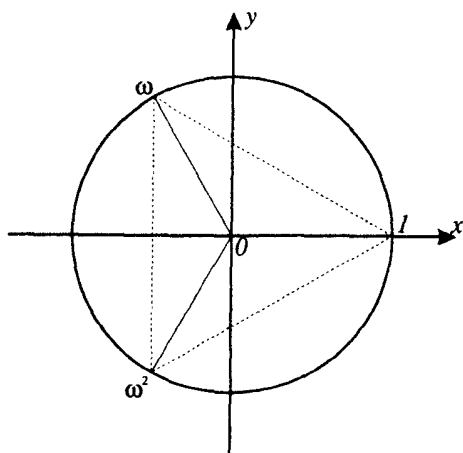
به موجب قضیه بنیادی جبر (قضیه ۱.۴.۱)، درست سه ریشه باید وجود داشته باشد، که باز به تعداد نامتناهی ریشه ظاهر می شود. ولی با توجه به دوره‌یی بودن توابع سینوسی و کسینوسی داریم

$$\omega_0 = 1 + i^0 = \omega_3 = \omega_6 = \omega_9 = \dots = \omega_{-3} = \omega_{-6} = \dots$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ &= \omega_4 = \omega_7 = \omega_{10} = \dots = \omega_{-2} = \omega_{-5} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ &= \omega_5 = \omega_8 = \omega_{11} = \dots = \omega_{-1} = \omega_{-4} = \dots \end{aligned}$$

این سه نقطه رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره یک هستند که یک رأس آن در نقطه ۱ است. توجه داریم که اگر قرار دهیم $\omega = \omega_1$ آنگاه $\bar{\omega} = \omega^2$ و $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (شکل ۱۳.۱)



شکل ۱۳.۱

اکنون به یافتن همه جوابهای معادله

$$z^n = 1$$

می‌پردازیم. فرض کنیم یک جواب آن در دستگاه قطبی به صورت

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

باشد. بنابر فرمول دموآور

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\therefore r = 1, \quad \cos n\theta + i \sin n\theta = 1$$

بنابراین

$$n\theta = 2k\pi, \quad \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

به عکس، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

در معادله مفروض صدق نمی‌کند. حال می‌گوئیم که اگر $k' \equiv k(n)$ (بیمانه n)، آنگاه $z_{k'} = z_k$ بی‌آنکه از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم

$$k' = k + jn \quad (j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} z_{k'} &= \cos \frac{2k'\pi}{n} + i \sin \frac{2k'\pi}{n} \\ &= \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi \right) \\ &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = z_k \end{aligned}$$

پس حداکثر n ریشه متمایز متناظر با اعداد $0, 1, \dots, n-1$ و k وجود دارد. به عکس، اگر $z_{k'} = z_k$ ، یعنی اگر

$$\cos \frac{2k'\pi}{n} + i \sin \frac{2k'\pi}{n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

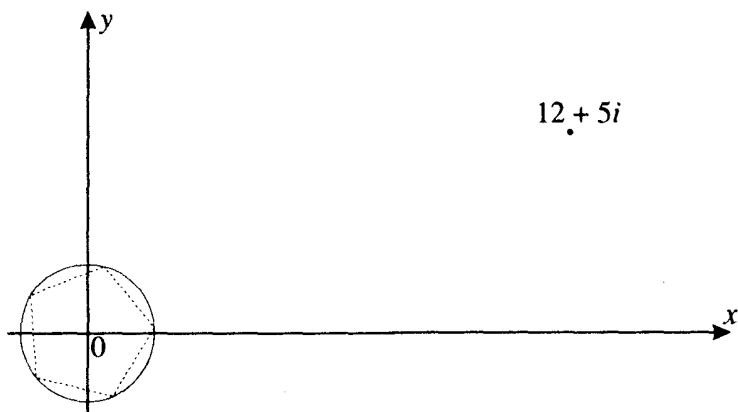
آنگاه به ازای مقداری مانند $m \in \mathbb{Z}$ داریم

$$\frac{2k'\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi$$

که ایجاب می‌کند داشته باشیم: $k' \equiv k \pmod{n}$.
گفته‌های خود را خلاصه می‌کنیم. دقیقاً n ریشه

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

متناظر با مقادیر $0, 1, 2, \dots, n-1$ و k وجود دارد. این ریشه‌ها رأسهای یک n -ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای که را تشکیل می‌دهند، که یک رأس آن در نقطه ۱ است.
مثال ۴. ریشه‌های $z^5 = 12 + 5i$ را بیابید.



شکل ۱۴.۱

حل. فرض می‌کنیم $\varphi = \arg(12 + 5i) = \arg 5/12$ ، چون $|12 + 5i| = 13$ ، اگر قرار دهیم $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، آنگاه

$$r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 13(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\therefore r = \sqrt[5]{13}, \quad \theta = \frac{\varphi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

در این صورت این ۵ ریشه رأسهای یک پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات هستند که یک رأس آن در نقطه $\sqrt[5]{13}(\cos \varphi/5 + i \sin \varphi/5)$ واقع است (شکل ۱۴.۱). خواننده باید روش نمایش قطبی را با روش بخشهای ۳.۱ و ۴.۱ مقایسه کند. مثال ۵. فرض کنید $z = \cos 2\pi/5 + i \sin 2\pi/5$ پس، $z^5 = 1$ و $z \neq 1$ داریم

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

از تقسیم دو طرف بر z^2 ($z^2 \neq 0$)، خواهیم داشت

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

یعنی

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

اما $z + \frac{1}{z} = 2 \cos 2\pi/5$ ، پس خواهیم داشت

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0 \quad \therefore \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ولی $\cos 2\pi/5 > 0$ ، پس

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

این نتیجه می‌رساند که یک پنج‌ضلعی منتظم را می‌توان با یک ستاره و پرگار ساخت. آزمون. مقدار دیگر $\frac{-\sqrt{5}+1}{4}$ از کجا می‌آید؟ آیا اساساً این یک عدد بی‌معنی است که باید دور انداخت؟

۱۰.۱ تابع نمایی

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال* آموخته‌ایم که به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

اگر به جای x ، $i\theta$ قرار دهیم چه خواهد شد؟ طرف چپ این تساوی $e^{i\theta}$ می‌شود، اما اینکه تابع نمایی با متغیر مختلط چیست؟ نمی‌دانیم. پس ابتدا نگاهی به طرف راست این تساوی می‌اندازیم. هر جملهٔ $(i\theta)^n/n!$ کاملاً تغییر خوبی دارد پس جملات را براساس آنهایی که i دارند و آنهایی که i ندارند دسته‌بندی می‌کنیم (چون این سری همگرایی مطلق است، ترتیب مجموعیابی را می‌توانیم در سری نامتناهی تغییر دهیم)، و خواهد شد

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right\} \\ & + i \left\{ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\} \\ & = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

باز هم به چیزی رسیدیم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموخته بودیم. چون $e^{i\theta}$ معنایی ندارد، می‌توانیم از این نتیجه برای تعریف آن استفاده کنیم.

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$$

بنابراین فرمول دموآور یعنی

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

به

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

* خواننده‌ای که زمینه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال ندارد، می‌تواند این بخش را رها نماید، $e^{i\theta}$ را به‌عنوان تلخیصی برای عبارت $\cos \theta + i \sin \theta$ تلقی نماید، با این شرط که $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}$ ، $e^{i\theta}$ را نیز صورت دیگری از $(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)$ تلقی کند.

تبدیل می‌شود که فرمولی پیش‌پا افتاده است. از قرار دادن $\theta = \pi$ در تساوی معرّف $e^{i\theta}$ ، خواهیم داشت

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad \therefore e^{i\pi} + 1 = 0$$

که پنج عدد $0, 1, \pi, e, i$ را بهم مربوط می‌کند؛ و می‌توان ثابت کرد که این ۵ عدد مهمترین اعداد در ریاضیات هستند.

اما تایع نمایی $f(x) = e^x$ ، $(x \in \mathbb{R})$ ، با ویژگی:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{یعنی} \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

(و شرط اولیه $f'(0) = 1$) مشخص می‌شود. آیا باز هم این ویژگی هنگامی که به متغیر مختلط گسترش داده شود معتبر می‌ماند؟ پاسخ مثبت از آب درمی‌آید. یک استدلال استادانه در کتاب «آنالیز ریاضی» تاکاگی^۱ آمده و آن این است که از یک سری با توان مختلط می‌توان در داخل قرص همگرایی جمله به جمله مشتق گرفت. فرض کنید

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

با مشتقگیری جمله به جمله از آن بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(z) = f(z)$$

به ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ و جمیع مقادیر $n \in \mathbb{N}$. بنابراین از بسط تابع $f(z+w)$ به سری تیلر در حول نقطه z خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f(z) + \frac{f'(z)}{1!}w + \frac{f''(z)}{2!}w^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}w^n + \cdots \\ &= f(z) \left\{ 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots \right\} \\ &= f(z) \cdot f(w) \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

از جمع و تفریق تساویهای

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

و

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

خواهیم داشت

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

و از ضرب این دو رابطه تساوی

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

به دست می آید.

مثال ۱. نشان دهید که

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) = 2^{n/2} e^x \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

حل. این کار را می توان به وسیله استقرای ریاضی انجام داد. اما محاسبات زیرین بینشی را به ما می دهد که موجب توجهی تعمیم می شود.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \Re e^{(1+i)x} \right\} \\ &= \Re \left\{ \frac{d^n}{dx^n} e^{(1+i)x} \right\} \\ &= \Re \left\{ (1+i)^n \cdot e^{(1+i)x} \right\} \\ &= \Re \left\{ \left(\sqrt{2} \cdot e^{i(\pi/4)} \right)^n \cdot e^{(1+i)x} \right\} \\ &= 2^{n/2} \cdot \Re \left\{ e^x \cdot e^{i(x + (n\pi/4))} \right\} \\ &= 2^{n/2} \cdot e^x \cdot \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

مثال ۲. درستی تساوی زیر را به ازای $0 \leq r < 1$ ، نشان دهید.

$$1 + 2(r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \cdots + r^n \cos n\theta + \cdots) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

حل.

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Re(r^n e^{in\theta}) \\ &= 1 + 2 \Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (r e^{i\theta})^n \right\} \\ &= 1 + 2 \Re \left\{ \frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} \right\} \\ &= 1 + 2 \frac{\Re\{r e^{i\theta}(1 - r e^{-i\theta})\}}{(1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta})} \\ &= 1 + \frac{2(r \cos \theta - r^2)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \end{aligned}$$

که این رابطه مهم هسته پواسون است. با به کارگیری قسمت انگاری به جای قسمت حقیقی در محاسبات بالا، مزدوج هسته پواسون به دست می آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad (0 \leq r < 1)$$

مثال ۳. به آسانی می توان تحقیق کرد که

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta &= \begin{cases} 2\pi & (n = 0); \\ 0 & (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \\ \therefore \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2^2} \int_0^{2\pi} (e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} + 1 + 2e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) d\theta \\ &= \frac{2}{2^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{2} \end{aligned}$$

به طور کلیتر، به ازای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \binom{2n}{n} \cdot \frac{2\pi}{2^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2\pi}{2^{2n}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} \cdot 2\pi \quad (\text{والیس}) \end{aligned}$$

تمرینها

۱. اعمال زیر را انجام دهید و هر یک از اعداد را به شکل $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)، بدل کنید:

الف) $(1-i)(2-i)(3-i)$ ؛

ب) $(\sqrt{3} + i)^6$ ؛

ج) $\frac{4+3i}{3-4i}$ ؛

د) $\frac{5-z}{5+z}$ ، که در آن $z = 4 + 3i$.

۲. اعداد حقیقی x و y و u و v را که در روابط زیر صدق می‌کنند پیدا کنید.

$$\begin{aligned} z &= x + i, & w &= 3 + iy, \\ z + w &= u - i, & zw &= 14 + iv \end{aligned}$$

۳. فرض می‌کنیم $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

الف) $|z|^2 = |\Re(z^2)|^2 + |\Im(z^2)|^2$ را برحسب a و b بیان کنید.

ب) اگر $z = 2 + i$ ، از این تساوی نتیجه می‌شود $5^2 = 4^2 + 3^2$. آیا می‌توانید سه‌تایی

فیثاغورسی دیگری بیابید؟

۴. نشان دهید که هر عدد مختلط z با $|z| = 1$ و $z \neq -1$ ، را می‌توان با انتخاب پارامتر حقیقی

t مناسب، چنین نوشت

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}$$

۵. فرض کنید $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$). برای a و b شرایطی پیدا کنید که:

الف) z^2 حقیقی باشد.

ب) z^2 انگاری محض باشد.

۶. قدرمطلقهای اعداد زیر را بیابید:

(الف) $3 + 2i$ ؛

(ب) $-1 + i\sqrt{3}$ ؛

(ج) $-i(1+i)(2-3i)(4+3i)$ ؛

(د) $\frac{(3-i)(-1+2i)}{2-3i}$.

۷. فرض کنید $z = a + ib$, $w = c + id$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

(الف) عبارت $|zw| = |z||w| = |z\bar{w}|$ را برحسب a, b, c, d بیان کنید.

(ب) با انتخاب $z = 2 + i$, $w = 2 + 3i$ در (الف)، خواهیم داشت $4^2 + 1 = 8^2 + 1$.

اعداد صحیح دیگر p و q و r ($p \neq 1, q \neq 1$) را که در معادله $r^2 + 1 = p^2 + q^2$ صدق می‌کنند پیدا کنید.

(ج) نشان دهید که مجموعه

$$S = \{p \in \mathbb{N}; p = m^2 + n^2 \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ مقادیر برخی}\}$$

تحت عمل ضرب بسته است. یعنی $p, q \in S \implies pq \in S$.

۸. (الف) قانون متوازی اضلاع: تساوی

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

را برای اعداد مختلط اختیاری α و β ثابت کنید.

(ب) فرض کنید $|\alpha| = |\beta|$. نشان دهید که به‌ازای هر $\gamma \in \mathbb{C}$

$$|\alpha + \gamma|^2 + |\alpha - \gamma|^2 = |\beta + \gamma|^2 + |\beta - \gamma|^2$$

(ج) تساویهای (الف) و (ب) را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

۹. چنانچه $|\alpha| < 1$ و $|z| \leq 1$ ، نشان دهید که $\left| \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z} \right| \leq 1$. چه وقت تساوی برقرار می‌شود؟

۱۰. مجموعه همه مقادیر $z \in \mathbb{C}$ را چنان بیابید که در شرایط زیر صدق نمایند:

(الف) $\Re z \geq \Im z$ ؛

(ب) $|z - 1 + 3i| < 4$ ؛

(ج) $|z - 1| + |z + i| = 2$ ؛

(د) $|z - 1 + i| - |z + 1 - i| \geq 2$.

۱۱. فرض کنید $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.

$$\left| \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \right| = 1 \quad \text{الف) با فرض } \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \text{ نشان دهید که}$$

$$\frac{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R} \quad \text{ب) نشان دهید که}$$

۱۲. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید:

الف) $1/2 z^2 + (1-i)z + i = 0$ (با مثال بخش ۳.۱ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توانید از آن بگیرید؟)

ب) $(1+i)z^2 - 3z - (1-i) = 0$. (مبین آن چیست؟ آیا ریشه‌های آن حقیقی‌اند؟)

۱۳. الف) نشان دهید که اگر α یک ریشه معادله چندجمله‌یی با ضرایب حقیقی (یعنی همه ضرایب حقیقی باشند) باشد، $\bar{\alpha}$ نیز یک ریشه آن است.

ب) نشان دهید که یک معادله چندجمله‌یی با ضرایب حقیقی و از درجه فرد باید دست‌کم یک ریشه حقیقی داشته باشد.

۱۴. اشتباه «استدلال» زیر چیست؟

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1 \quad \therefore 2 = 0$$

۱۵. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $z^3 - i = 0$

ب) $z^4 + 1 = 0$

ج) $z^5 + 32 = 0$

د) $z^6 - 1 = 0$

۱۶. مثال دیگری از رابطه ترتیبی در \mathbb{C} ارائه دهید که در اصلهای موضوع P_1 و P_2 بخش ۵.۱ صدق کند.

۱۷. a و b و c را در \mathbb{R} اختیار کنید. از اصلهای موضوع P_1 و P_2 و P_3 بخش ۵.۱ نتیجه بگیرید:

الف) $a > b, b > c \implies a > c$

ب) $a > b, c > 0 \implies ac > bc$

ج) $a > b, c < 0 \implies ac < bc$

۱۸. چنانچه $\zeta^5 = 1$ ، نشان دهید که

الف) $\frac{\zeta}{1+\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{1+\zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1+\zeta} + \frac{\zeta^4}{1+\zeta^3} = 2$

ب) $\frac{\zeta}{1-\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{1-\zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1-\zeta} + \frac{\zeta^4}{1-\zeta^3} = 0 \quad (\zeta \neq 1)$

۱۹. فرض کنید $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

الف) نشان دهید که هر عدد مختلط $z \in \mathbb{C}$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت

$$z = a + b\omega \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

بیان کرد.

ب) a و b ($a, b \in \mathbb{R}$)، را چنان تعیین کنید که $\frac{\gamma + 5\omega + 3\omega^2}{1 - 2\omega} = a + b\omega$ ۲۰. نشان دهید که برای مقادیر دلخواه $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ داریم

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

چه وقت تساوی برقرار است؟

۲۱. سه رأس $1 - 2i$ ، $3 + i$ و $-2 + 4i$ از یک متوازی‌الاضلاع داده شده‌اند. رأس چهارم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۲۲. نشان دهید که اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند.

۲۳. نشان دهید که در یک چهارضلعی دلخواه، وسطهای چهار ضلع، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۲۴. در بخش ۷.۱ دیدیم که نقطه z فقط و فقط هنگامی بر پاره خط واصل بین نقاط z_1 و z_2 قرار دارد که،

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2, \quad t \in (0, 1) \text{، تساوی،}$$

برقرار باشد. اگر $t \in \mathbb{R}$ در این حوزه مقادیر نباشد چه؟

۲۵. الف) نشان دهید که سه نقطه $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ فقط و فقط هنگامی بر یک خط قرار دارند که سه عدد حقیقی α, β, γ وجود داشته باشند چنان‌که

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

ب) آیا می‌توان این مطلب را برای چهار نقطه یا بیشتر تعمیم داد؟

۲۶. یک شش‌ضلعی داده شده است. اگر وسطهای اضلاع آن را یک در میان بهم وصل کنیم، رأسهای دو مثلث به‌دست می‌آید. نشان دهید که مرکزهای این دو مثلث برهم منطبق‌اند.

۲۷. در مثلث $\triangle ABC$ نقاط A', B', C' به‌ترتیب بر اضلاع BC, CA, AB (یا بر امتداد آنها) چنان‌اند که:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}}$$

که در آنها جهتهای پاره خطهای منظور شده‌اند. یعنی $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{BC}} > 0$ اگر $\overrightarrow{BA'}$ و \overrightarrow{BC} همجهت باشند $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{BC}} < 0$ اگر مختلف‌الجهت باشند؛ همچنین است برای نسبت‌های دیگر. نشان دهید که مرکزوارهای $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ بر هم منطبق‌اند.

۲۸. الف) چهار نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 در صفحه مختلط مفروض‌اند. مرکزوارهای $\triangle z_1 z_2 z_3$ ، $\triangle z_1 z_2 z_4$ و $\triangle z_1 z_3 z_4$ را به ترتیب w_1, w_2, w_3 و w_4 می‌گیریم (چنانچه بخواهید می‌توانید فرض کنید هیچ سه نقطه‌ای از این چهار نقطه بر یک خط راست نیستند). نشان دهید که ۴ پاره‌خطی که نقاط z_1, w_1 و z_2, w_2 و z_3, w_3 و z_4, w_4 را بهم وصل می‌کنند در یک نقطه متقاطع‌اند.

ب) مسأله را تعمیم دهید.

۲۹. الف) ۳ نقطه داده شده‌اند. مثلی بسازید که این سه نقطه وسط‌های اضلاع آن باشند.

ب) ۵ نقطه داده شده‌اند. یک پنج‌ضلعی (که ممکن است خودش را قطع کند) بسازید که این پنج نقطه وسط‌های اضلاع آن باشند.

ج) مسأله را تعمیم دهید.

د) اگر تعداد نقاط زوج باشد چه خواهد شد؟

۳۰. z_1, z_2, z_3 را نقاط دلخواهی در صفحه مختلط بگیرید:

الف) یک نقطه مانند z وقتی و فقط وقتی درون یا بر مرز $\triangle z_1 z_2 z_3$ قرار دارد که اعدادی حقیقی و نامنفی مانند α, β, γ وجود داشته باشند به قسمی که:

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

ب) مکان هندسی نقاطی را بیابید که برای آنها $\alpha = 1/3$.

ج) همچنین نشان دهید که اگر $\triangle z_1 z_2 z_3$ تباهیده نشود، تناظر بین مجموعه نقاط z در مثلث بسته (یعنی مثلث به انضمام مرز آن) و مجموعه سه‌تایی‌های مرتب

$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

یک به یک است (α, β, γ) را مختصات گرانیگاهی^۱ نقطه z گویند

۳۱. الف) z_1, z_2, \dots, z_n را نقاط دلخواهی در صفحه مختلط می‌گیریم ($n \geq 2$). نشان دهید که یک نقطه مانند z وقتی و فقط وقتی در داخل کوچکترین چندضلعی محدب بسته شامل این n نقطه قرار دارد که اعدادی حقیقی و نامنفی مانند $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشند

1. barycentric coordinates

به طوری که،

$$z = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

(ب) فرض کنیم z_1, z_2, \dots, z_n رؤس یک n ضلعی محدب باشند. آیا در نمایش مسأله قبلی با یکتایی مواجه می‌شویم؟
 ۳۲. الف) فرض می‌کنیم $0 \leq \arg w - \arg z < \pi$ ، نشان دهید که مساحت ΔOzw برابر است با

$$\frac{1}{2} \Im(\bar{z}w)$$

(ب) فرض کنید $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \dots < \arg z_n < 2\pi$ ، نشان دهید که مساحت چندضلعی با رأسهای z_1, z_2, \dots, z_n برابر است با

$$\frac{1}{2} \Im \left\{ \sum_{k=1}^n \bar{z}_{k-1} z_k \right\} \quad (z_0 = z_n)$$

(ج) نشان دهید که نتیجه قسمت (ب) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})(\bar{z}_k + \bar{z}_{k-1})$$

۳۳. الف) $z \in \mathbb{C}$ مفروض است، نشان دهید که مقادیری مانند $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ با شرایط $|\alpha| = |\beta| = 1$ وجود دارند به قسمی که $z = \alpha + \beta$ فقط و فقط اگر $|z| \leq 2$.
 (ب) $z \in \mathbb{C}$ مفروض است. نشان دهید که مقادیری مانند $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ با شرایط $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ وجود دارند به قسمی که $z = \alpha + \beta + \gamma$ فقط و فقط اگر $|z| \leq 3$.
 (ج) مسأله را تعمیم دهید.

۳۴. الف) شرطی برای $a, b \in \mathbb{R}$ پیدا کنید که دستگاه معادلات $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$ دارای جواب $x, y \in \mathbb{R}$ باشد.

(ب) جواب دستگاه بالا را برای حالت $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ بیابید.

(ج) دستگاه معادلات $\begin{cases} \sin x + \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ را حل کنید.

(د) دستگاه معادلات $\begin{cases} 5 \sin x + 3 \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5 \cos x + 3 \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ را حل کنید.

۳۵. الف) اگر $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ، نشان دهید که z_1, z_2, z_3 رأسهای مثلث متساوی الاضلاعی محاط در دایره یکه‌اند.

ب) اگر $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ ، در مورد چهارضلعی با رأسهای z_1, z_2, z_3, z_4 چه می‌توانیم بگوئیم؟

۳۶. به‌ازای هر عدد مختلط $a \neq 0$ ، نشان دهید که $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$ و O همخط‌اند.

۳۷. نمایش قطبی اعداد زیر را بیابید:

الف) $1 + i$ ؛

ب) $4 - 3i$ ؛

ج) $1 + \omega$ ؛

د) $\frac{1}{\omega}$ که در آن $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

۳۸. شرط $0 \leq \arg z < 2\pi$ ، یک مثال نقض برای $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ بیاورید.

اگر شرط $-\pi < \arg z \leq \pi$ باشد، چه خواهد شد؟

۳۹. الف) نشان دهید که $\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ ($z \neq 1$).

ب) فرض کنید $\zeta^{17} = 1$ ، ($\zeta \neq 1$)، نشان دهید که:

$$1 + \zeta^k + \zeta^{2k} + \dots + \zeta^{16k} = 0$$

که k عدد صحیح دلخواهی است که مضربی از ۱۷ نیست.

۴۰. فرض می‌کنیم θ زاویه خارجی یک n ضلعی منتظم باشد. نشان دهید که:

الف) $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n-1)\theta = 0$ ؛

ب) $1 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin(n-1)\theta = 0$.

۴۱. الف) اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

ب) با استفاده از اتحادهای (الف) مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

[از این روابط برای بررسی درستی نتایج مذکور در (الف) استفاده می‌شود].

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos k\theta}{\theta^2} = ?, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin k\theta}{\theta} = ? \quad \text{راهنمایی:} \quad ۴۲. \text{ نشان دهید که}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - + \dots &= 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - + \dots &= 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

راهنمایی: $(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \dots + \binom{n}{n}z^n$.

۴۳. (الف) $1 + i\sqrt{3}$ را به صورت قطبی بنویسید.

(ب) عبارت $(1 + i\sqrt{3})^{1991} + (1 - i\sqrt{3})^{1991}$ را ساده کنید.

(ج) $(1 + i)^{1991} - (1 - i)^{1991}$, $(1 + i)^{1991} + (1 - i)^{1991}$ را ساده کنید.

۴۴. فرض کنید $(x_n + iy_n)^n = (1 + i\sqrt{3})^n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. نشان دهید که

$$x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = 2^{2n} \sqrt{3},$$

$$x_{n+1} x_n + y_{n+1} y_n = 2^{2n}$$

۴۵. کوچکترین اعداد صحیح و مثبت m و n را بیابید که در تساوی:

$$(1 + i\sqrt{3})^m = (1 - i)^n$$

صدق کنند.

۴۶. فرض کنید $x = a + b$, $y = a\omega + b\omega^2$, $z = a\omega^2 + b\omega$ که در آنها $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

$x^2 + y^2 + z^2$ را برحسب a و b بیان کنید.

۴۷. فرض کنید $\omega^2 + \omega + 1 = 0$:

(الف) دو چندجمله‌یی $p(z)$ و $q(z)$ داده شده‌اند. نشان دهید که چندجمله‌یهای

$$f(z) = p(z)p(\omega z)p(\omega^2 z),$$

$$g(z) = p(\omega z)q(\omega^2 z) + p(\omega^2 z)q(z) + p(z)q(\omega z)$$

فقط وقتی ضرایب ناصفر a_k, b_k دارند که k مضربی از ۳ باشد. a_k, b_k به ترتیب ضرایب z^k در $f(z)$ و $g(z)$ هستند.

ب) ثابت کنید که هر تابع $\varphi(z)$ را (که به ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ تعریف شده است) می‌توان به صورت

$$\varphi(z) = f(z) + g(z) + h(z)$$

بیان کرد که در آن به ازای جمیع مقادیر $z \in \mathbb{C}$ ، $f(\omega z) = f(z)$ ، $g(\omega z) = \omega g(z)$ ، $h(\omega z) = \omega^2 h(z)$.

ج) مسأله را تعمیم دهید.

۴۸. نشان دهید که

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

(الف)

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right)$$

$$\sin 4\theta = 8 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin 5\theta &= 16 \sin \theta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{5} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{5} - \theta \right) \times \\ &\times \sin \left(\frac{\pi}{5} + \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{5} + \theta \right) \end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) \quad \text{ب)}$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos \theta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= 8 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{8} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{8} + \theta \right) \times \\ &\times \sin \left(\frac{3\pi}{8} + \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= 16 \cos \theta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{10} - \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{10} - \theta \right) \times \\ &\sin \left(\frac{\pi}{10} + \theta \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{10} + \theta \right) \end{aligned}$$

ج) مسأله را تعمیم دهید.

۴۹. الف) فرض کنید $\zeta = e^{2\pi i/n}$ ، نشان دهید که

$$\prod_{k=1}^n (z - \zeta^k) = z^n - 1$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \zeta^k) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$$

ب) نشان دهید که

$$\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

۵۰. با استفاده از یک ستاره و پرگار تنها، یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.

۵۱. فرض می‌کنیم $1 + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z}$. نشان دهید که دنباله $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ که در آن $w_k = z^k + \frac{1}{z^k}$ دنباله‌ای متناوب است، و دوره تناوب آن را بیابید.

۵۲. الف) نشان دهید که چندجمله‌یی $1 + z^n + z^{2n}$ ، $(n \in \mathbb{N})$ ، بر $1 + z + z^2$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ نباشد.

ب) شرطی لازم و کافی برای اعداد طبیعی p و q بیابید به طوری که چندجمله‌یی $1 + z^p + z^q$ ، $(p, q \in \mathbb{N})$ ، بر $1 + z + z^2$ بخشپذیر باشد.

۵۳. نشان دهید که

الف) به ازای هر عدد طبیعی n چندجمله‌یهای $p_n(x)$ و $q_n(x)$ (با ضرایب حقیقی) وجود دارند که در تساویهای

$$\cos n\theta = p_n(\tan \theta) \cdot \cos^n \theta$$

$$\sin n\theta = q_n(\tan \theta) \cdot \cos^n \theta$$

صدق می‌کنند.

$$p_n(x) = \frac{1}{2} \{ (1 + ix)^n + (1 - ix)^n \} \quad \text{ب)}$$

$$q_n(x) = \frac{1}{2i} \{ (1 + ix)^n - (1 - ix)^n \}$$

$$p'_n(x) = -nq_{n-1}(x), \quad q'_n(x) = np_{n-1}(x) \quad (n > 1) \quad \text{ج)}$$

۵۴. روابط مشابهی برای مثال بخش ۱۰.۱ حدس بزنید و اثبات کنید:

۱. مسأله ۵۳، به‌استثنای قسمت (ب)ی آن، از امتحان ورودی دانشگاه توکیو، ژاپن، ۲۵ فوریه ۱۹۹۱ گرفته شده است.

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot \sin x) \quad \text{الف)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{\sqrt{2}x} \cdot \cos x) \quad \text{ب)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} \cdot \sin \sqrt{3}x) \quad \text{ج)}$$

۵۵. حساب کنید:

$$H = \int e^{ax} \cdot \cos bxdx \quad \text{الف)}$$

$$K = \int e^{ax} \cdot \sin bxdx \quad \text{ب)}$$

راهنمایی: $H + iK = ?$

کاربرد در هندسه

۱.۲ مثلثها

اکنون به کاربردهای اعداد مختلط در هندسهٔ مسطحه می‌پردازیم. یک مطلب مهم که باید به خاطر داشته باشیم این است که اعداد مختلط فقط بردار نیستند، و می‌توانند در یکدیگر ضرب شوند. در کاربردهای اعداد مختلط در هندسه، از این ویژگی کاملاً استفاده خواهیم کرد. بویژه در حل برخی از نمونه‌های مسائل، اعداد مختلط کارایی زیادی دارند، اما ممکن است در برخی مسائل، که با روشهای مقدماتی قابل حل هستند، دست و پاگیر باشند.

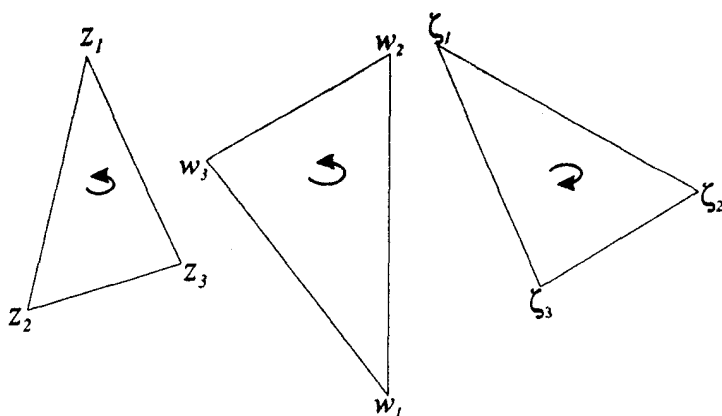
در هندسهٔ مقدماتی، مثلثها در حکم بلوکهای ساختمانی هستند و موضوع قابلیت انطباق و مشابهت در آنها اساسیترین مفاهیم هستند. مطلب را از شرایط تشابه دو مثلث، برحسب اعداد مختلط آغاز می‌کنیم. ابتدا به ذکر قراردادهای نمادی و مرور برخی نکات می‌پردازیم. در سراسر این فصل می‌گوییم $\Delta z_1 z_2 z_3$ با $\Delta w_1 w_2 w_3$ متشابه است اگر، و فقط اگر، دو مثلث در زاویهٔ z_k با زاویهٔ w_k برابر (و در نتیجه z_k متناظر با w_k ، $k = 1, 2, 3$) و همجهت (هر دو ساعتسو یا هر دو پادساعتسو) باشند. و می‌نویسیم

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

و چنانچه در خلاف جهت یکدیگر (یکی ساعتسو و دیگری پادساعتسو) باشند، می‌نویسیم:

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \quad (\text{در جهت عکس})$$

توجه داشته باشید که باز هم z_k باید متناظر با w_k ($k = 1, 2, 3$) باشد.



شکل ۱.۲

طبق معمول، نمادهای \perp , \parallel را به ترتیب برای نمودن توازی دو خط (پاره خط یا بردار) و تعامد آنها به کار می‌بریم.

چون به ازای نقاط متمایز $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

زاویه جهتدار بردار $\vec{\alpha\gamma}$ با بردار $\vec{\alpha\beta}$ $\arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha)$

$$\begin{aligned} \gamma, \beta, \alpha \text{ همخط‌اند} &\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \vec{\alpha\beta} \perp \vec{\alpha\gamma} &\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \text{ انگاری محض است} \\ &\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

و کثیر بگوئیم به ازای چهار نقطه متمایز $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$$\vec{\alpha\beta} \parallel \vec{\gamma\delta} \iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R}$$

۱. منظور از زاویه جهتدار $\vec{\alpha\beta}$ با بردار $\vec{\alpha\delta}$ زاویه‌ای است که مبدأ آن بردار $\vec{\alpha\delta}$ است.

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}}$$

وانگهی $\vec{\alpha\beta}$ و $\vec{\gamma\delta}$ همجهت (یا مختلف الجهت) هستند، اگر و فقط اگر، $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$ عدد حقیقی مثبت (یا منفی) باشد؛ و

$$\begin{aligned} \vec{\alpha\beta} \perp \vec{\gamma\delta} &\iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \text{ انکاری محض است} \\ &\iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}} = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه، هرگاه $\alpha, \beta \neq 0$ ، آنگاه

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \frac{\alpha}{\beta} > 0.$$

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \quad \text{قضیه ۱.۱.۲.}$$

$$\begin{aligned} \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} &= \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

برهان. دو مثلث فقط و فقط هنگامی متشابه‌اند که نسبت‌های دو ضلع متناظرشان برابر و زوایای (متناظر) بین آنها نیز برابر باشند (از جمله جهت آنها یکی باشد). از این رو

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

$$\begin{aligned} \iff \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| &= \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad \text{و} \quad \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} &= \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

جوابها:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ب)}$$

مثال ۳. عمود منصفهای سه ضلع یک مثلث دلخواه در یک نقطه متلاقى اند. این نقطه تلاقی را مرکز دایره محیطی مثلث گویند.
حل. سه رأس A, B, C ی مثلث را به ترتیب با اعداد مختلط α, β, γ نمایش می دهیم. در این صورت معادله عمود منصف ضلع BC خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\gamma} & 1 \\ \gamma & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

یعنی

$$(\bar{\beta} - \bar{\gamma})z + (\beta - \gamma)\bar{z} = |\beta|^2 - |\gamma|^2$$

همین طور برای عمود منصفهای اضلاع AB, CA به ترتیب خواهیم داشت:

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z + (\gamma - \alpha)\bar{z} = |\gamma|^2 - |\alpha|^2,$$

$$(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + (\alpha - \beta)\bar{z} = |\alpha|^2 - |\beta|^2,$$

از جمع هر دو معادله ای از این سه معادله، معادله سومى به دست می آید که می رساند جواب هر دو معادله ای از این معادلات خود به خود در معادله سوم صدق می کند. به عبارت دیگر، نقطه تلاقی هر دو عمود منصف، بر عمود منصف دیگر قرار دارد. از حل دستگاه همزمان هر دو معادله از این سه معادله مرکز دایره محیطی مثلث به دست می آید:

$$z = \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}$$

دقت کنید که با توجه به تقارن، دوباره می بینیم که این جواب در معادله دیگر صدق می کند.
مثال ۱. $\Delta z_1 z_2 z_3$ متساوی الاضلاع است

$$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \cdot (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \quad (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

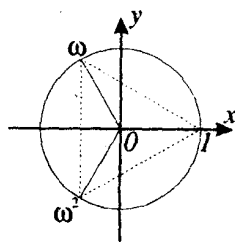
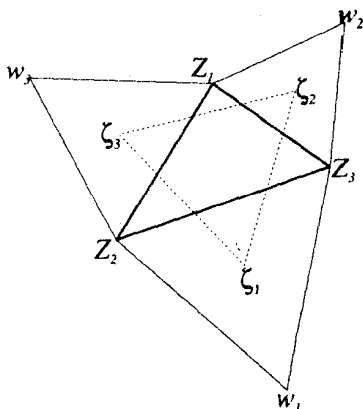
$$\Leftrightarrow z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \quad \text{یا} \quad z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2 \quad \text{یا} \quad \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega^2 \omega$$

مثال ۲. (نایبلتون) بر هر یک از اضلاع یک مثلث و در خارج آن، مثلث متساوی الاضلاع می سازیم. مرکزهای این سه مثلث متساوی الاضلاع رأسهای یک مثلث متساوی الاضلاع هستند. برهان. $\Delta z_1 z_2 z_3$ را مثلث مفروض و

$$\Delta \omega_1 z_3 z_2 \quad \Delta z_3 \omega_2 z_1, \quad \Delta z_2 z_1 \omega_3$$



شکل ۳.۲

را مثلثهای متساوی الاضلاع مورد نظر همجهت، مثلاً با $\Delta 1\omega\omega^2$ (که در آن $\omega^2 + \omega + 1 = 0$) با مرکزوارهای $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ می‌گیریم. پس

$$\omega_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_2 = 0,$$

$$z_2 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0,$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_2 = 0$$

پس برای اثبات متساوی الاضلاع بودن $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ عبارت $\zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 \\ &= \frac{1}{3}(\omega_1 + z_2 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_2 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_2) \\ &= \frac{1}{3}\{(w_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_2) + (z_2 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_2)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ یک مثلث متساوی الاضلاع است.
 برهان دیگر. چون $\Delta O1\omega \sim \Delta \zeta_1 z_2 z_2$ ، داریم

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی

$$\begin{aligned} (1 - \omega)\zeta_1 - z_2 + \omega z_2 &= 0 \\ \therefore \zeta_1 &= \frac{z_2 - \omega z_2}{1 - \omega} \end{aligned}$$

همین‌طور

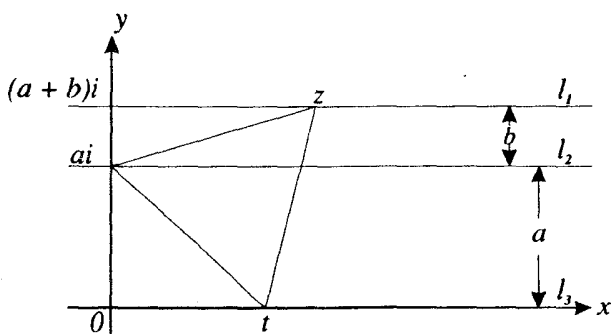
$$\zeta_2 = \frac{z_2 - \omega z_1}{1 - \omega}, \quad \zeta_3 = \frac{z_1 - \omega z_2}{1 - \omega}$$

$$\begin{aligned} \therefore \zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 &= \frac{1}{1 - \omega} \{(z_2 - \omega z_2) + \omega(z_2 - \omega z_1) + \omega^2(z_1 - \omega z_2)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

قضیه بالا را عموماً به ناپلئون نسبت می دهند. مشهور است که ناپلئون مدرسه پلی تکنیک را در ۱۷۹۴ تأسیس نمود بسیاری از ریاضیدانان فرانسوی را در اوایل سده نوزدهم در آنجا گرد آورد. بسیاری کسانی که هنوز هم تردید دارند که ناپلئون آئندره هندسه می دانسته که این قضیه را کشف کند. اتفاقاً ناپلئون بناپارت یکی از معدود کسانی در تاریخ معاصر است که به نام (نه به لقب) شناخته شده است. گالیلئو گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲) نمونه دیگری از آنهاست.

مثال. خطوط l_1, l_2, l_3 با یکدیگر موازی اند و l_2 بین l_1 و l_3 واقع است. فاصله بین l_1 و l_2 برابر a و فاصله بین l_2 و l_3 برابر b است. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را که هر رأس آن بر یکی از این سه خط موازی قرار داشته باشد، بر حسب a و b بیان کنید.

حل. محورهای مختصات را به صورتی که در شکل ۴.۲ آمده است اختیار می کنیم. یک رأس



شکل ۴.۲

آن، ai را ثابت نگاه می داریم و رأس دیگر t ، را بر محور حقیقی حرکت می دهیم و سعی می کنیم مکان هندسی رأس سوم یعنی z را بیابیم

داریم

$$z + aiw + tw^2 = 0 \quad (\omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

$$\therefore z = \frac{1}{2} \left\{ (a\sqrt{3} + t) + i(a + t\sqrt{3}) \right\}$$

هنگامی که رأس سوم یعنی z بر خط $z = a + b$ واقع باشد، داریم:

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b) \quad \text{یعنی} \quad \frac{1}{2}(a + t\sqrt{3}) = a + b$$

از این رو مربع طول یک ضلع برابر است با

$$|t - ai|^2 = \frac{1}{3}(a + 2b)^2 + a^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

پس، مساحت مطلوب چنین است

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

۲.۲ قضیه بطلمیوس - اوایلر

به ازای هر چهار عدد مختلط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ به آسانی می‌توان تساوی زیر را تحقیق کرد

$$(\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \delta) + (\alpha - \delta) \cdot (\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \delta)$$

و با توجه به نابرابری مثلثی خواهیم داشت

$$|\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| \cdot |\beta - \gamma| \geq |\alpha - \gamma| \cdot |\beta - \delta|$$

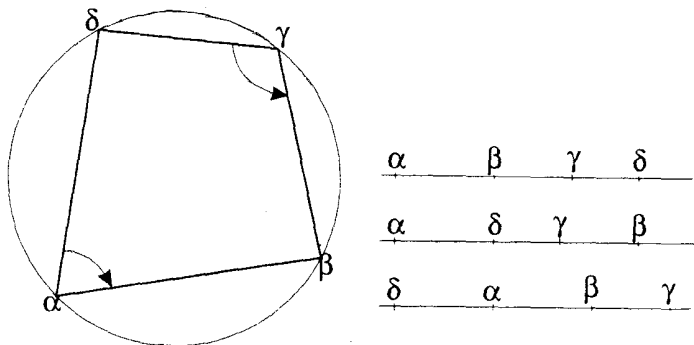
اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که این نابرابری به برابری بدل شود. در حالت نابرابری مثلثی،

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

تساوی، فقط و فقط هنگامی برقرار خواهد شد که $\frac{z_1}{z_2}$ یک عدد حقیقی مثبت (به شرط $z_1 z_2 \neq 0$) باشد. پس به جستجوی شرطی می‌پردازیم که ضامن مثبت و حقیقی بودن عدد

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} \quad \text{عدد مثبت حقیقی بودن} \\ \iff & \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \quad \text{عدد منفی حقیقی بودن} \\ \iff & \arg \left\{ \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \right\} \\ & = \arg \left\{ \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \right\} - \arg \left\{ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \right\} \equiv \pi \quad (\text{پیمانه } 2\pi) \end{aligned}$$

یعنی $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ همدایره هستند (به فرع الف ۳.۲ در پیوست الف رجوع کنید) و α و γ در دو طرف وتر واصل بین دو نقطه δ و β قرار دارند، که نتیجه آن به ترتیب الفبایی قرار گرفتن این نقاط (ساعتسو یا پادساعتسو) است. پس قضیه زیر را ثابت کردیم



شکل ۵.۲

قضیه ۱.۲.۲. به ازای هر چهار نقطه A, B, C, D در صفحه داریم

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می شود که این چهار نقطه همدایره (یا همخط) باشند و به ترتیب الفبایی (ساعتسو یا پادساعتسو) قرار گرفته باشند.

حالت تساوی توسط ک. بطلمیوس (حدود ۸۵-۱۶۵ ب. م) کشف گردید، در صورتی که حالت کلی متجاوز از هزار سال بعد توسط ل. اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) پیدا شد. ولی با استفاده از اعداد مختلط نتایج آن را می توان فقط در یک سطر به دست آورد.

عبارت

$$(\alpha, \beta; \gamma, \delta) := \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \right) / \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta} \right)$$

را نسبت ناهمساز چهار نقطه $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ گویند، این نسبت نقش مهمی در بخشهای مختلف ریاضیات، به خصوص در هندسه تصویری، که مسلماً یکی از زیباترین شاخه های ریاضیات است ایفا می کند.

فرع ۲.۲.۲. چهار نقطه $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ همدایره (همخط) اند، اگر و فقط اگر

$$(\alpha, \beta; \gamma, \delta) \in \mathbb{R}$$

در مطالب بعد، همخطی، حالت خاص (تابهیده) همدایرگی در نظر گرفته می شود. هنگامی که چهار ضلعی محاطی به مستطیل بدل شود، قضیه بطلمیوس به صورت زیر در می آید:

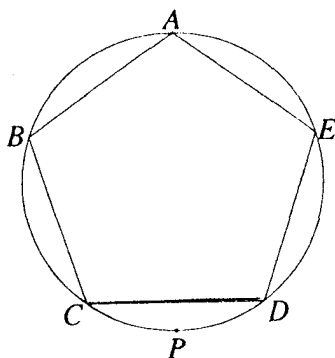
فرع ۳.۲.۲. (فیناغورس) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، قائمه در رأس C ، داریم:

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$$

مثال. فرض می‌کنیم $ABCDE$ پنج ضلعی منتظمی به ضلع ℓ محاط در دایره‌ای به شعاع r و P وسط \widehat{CD} و d طول یک قطر آن باشد. با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس ۱.۲.۲ برای چهار ضلعیهای $ACPD$ ، $ACDE$ خواهیم داشت:

$$2xd = 2r\ell \quad \text{و} \quad d\ell + \ell^2 = d^2$$

که در آن x طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\varphi := \frac{r}{x} = \frac{d}{\ell}$ در تساوی $\varphi^2 = \varphi + 1$ صدق می‌کند.



شکل ۶.۲

بنابراین نسبت شعاع r به طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاطی، $2x$ ، نسبت زرین معروف را می‌دهد:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \varphi > 0)$$

بویژه همان‌طوری که قبلاً در انتهای بخش ۹.۱ دیده‌ایم، یک پنج ضلعی منتظم را می‌توان با یک ستاره و پرگار رسم کرد.

۳.۲ قضیه‌های کلیفرد

در این بخش^۱ دنباله‌ای نامتناهی از قضیه‌هایی را که و.ک. کلیفرد (۱۸۴۵-۱۸۷۹) کشف نموده، اثبات می‌کنیم. مرحلهٔ حساس در این کار حلّ لم زیرین است که در بخشهای دیگر نیز از آن استفاده می‌شود. ۱. غیر از این لم مطالب دیگر این بخش برای بقیهٔ کتاب مورد نیاز نیست. لذا در مطالعهٔ اول می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

لم ۱.۳.۲. چهار دایره C_1, C_2, C_3, C_4 را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. فرض کنید C_1 و C_2 یکدیگر را در z_1 و C_2 و C_3 یکدیگر را در z_2 و C_3 و C_4 یکدیگر را در z_3 و C_4 و C_1 یکدیگر را در z_4 و w_4 قطع کنند. در این صورت نقاط z_1, z_2, z_3, z_4 همدایره خواهند بود، اگر و فقط اگر w_1, w_2, w_3, w_4 همدایره باشند.

برهان. بنابه فرض چهار نسبت ناهم‌ساز زیر حقیقی‌اند

$$(z_1, w_2; z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \bigg/ \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1}$$

$$(z_2, w_3; z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \bigg/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}$$

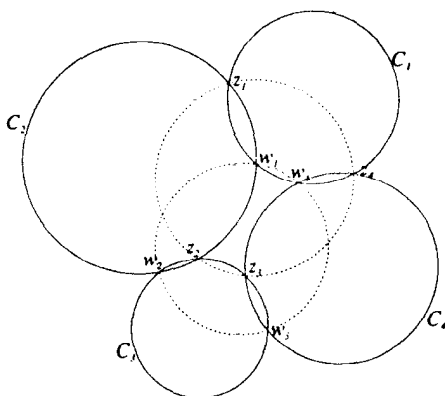
$$(z_3, w_4; z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \bigg/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}$$

$$(z_4, w_1; z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \bigg/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}$$

از این رو

$$\begin{aligned} & \frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} \\ &= \left\{ \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right) \bigg/ \left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} \right) \bigg/ \left(\frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4} \right) \right\} \\ &= (z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot (w_1, w_3; w_2, w_4) \end{aligned}$$

حقیقی است. پس $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ حقیقی است اگر و فقط اگر $(w_1, w_3; w_2, w_4)$ حقیقی باشد. ■



شکل ۷.۲

اما دایره محیطی $\Delta z_{12}z_{13}z_{14}$ دایره C_{123} است، پس دایره‌های $C_{123}, C_{124}, C_{134}$ در نقطه z_{1234} همدیگر را تلاقی می‌کنند.

پس، نشان دادیم که دایره $C_{123}, C_{124}, C_{134}, C_{143}$ در نقطه z_{1234} که آن را نقطه کلیفرد چهار خط C_1, C_2, C_3, C_4 می‌نامیم، همدیگر را می‌برند.

پیش از پرداختن به حالت پنج خط، اشاره می‌کنیم که: نقطه z_{jkl} فصل مشترک خطوط C_j است؛ دایره C_{lmn} از نقاط z_{lm}, z_{ln}, z_{mn} می‌گذرد و نقطه z_{klmn} فصل مشترک دایره $C_{klm}, C_{kln}, C_{kmn}, C_{lmn}$ است. به‌خصوص دایره C_{lmn} و C_{kmn} در نقاط z_{mn} و z_{klmn} متقاطع‌اند. حال آماده‌ایم که به مرحله بعدی بپردازیم.

فرض کنید پنج خط C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 در وضعیت کلی داده شده باشند. با حفظ نمادهایی که در بالا به‌کار بردیم و در نظر گرفتن چهار خط در هر بار، پنج نقطه کلیفرد $z_{1234}, z_{1235}, z_{1245}, z_{1345}$ را به دست می‌آوریم. حال می‌گوییم که این پنج نقطه کلیفرد همدایره‌اند. برای اثبات آن کافی است ثابت کنیم که هر چهار نقطه از این پنج نقطه کلیفرد همدایره‌اند. مثلاً چهار نقطه $z_{1234}, z_{1235}, z_{1245}, z_{1345}$ را در نظر می‌گیریم. این نقاط را می‌توان به ترتیب فصل مشترک دایره‌های $C_{123}, C_{124}, C_{125}$ و C_{134}, C_{135} و C_{145} و C_{234}, C_{235} و C_{245} و C_{345} در نظر گرفت. دومین نقطه متقاطع این زوج دایره‌ها عبارت‌اند از نقاط $z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{15}$ که همخط‌اند (همه بر C_1 قرار دارند) و لذا بنابر لم ۱.۳.۲ نتیجه مطلوب را به دست می‌آوریم. دایره‌ای که بدین ترتیب به دست می‌آید دایره کلیفرد خطوط C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 نامیده می‌شود و با C_{12345} نشان داده می‌شود.

حال شش خط در وضعیت کلی $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ داده شده‌اند. با گرفتن پنج خط در هر بار، شش دایره کلیفرد به دست می‌آوریم. می‌گوییم که این شش دایره در یک نقطه، نقطه کلیفرد شش خط، متلاقی‌اند. برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که هر سه دایره از شش دایره در یک نقطه متلاقی‌اند. به‌دقت توجه کنید: ارائه مثالی از چهار دایره که هر سه‌تای آنها در یک نقطه متلاقی باشند بدون اینکه هر چهار دایره در یک نقطه متلاقی باشند آسان است، اما در مورد پنج دایره یا بیشتر این امر میسر نیست.

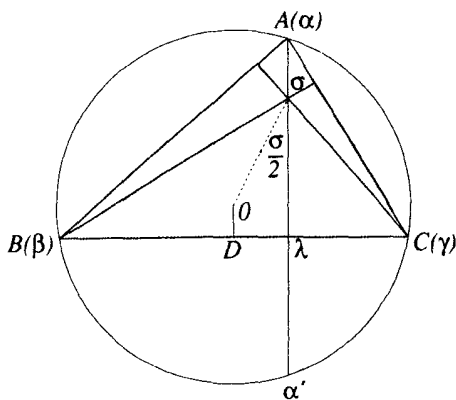
فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم که دایره‌های $C_{123456}, C_{12345}, C_{12346}, C_{12356}, C_{12456}, C_{13456}, C_{23456}$ متلاقی‌اند. رشته‌ای مرکب از چهار دایره $C_{123456}, C_{12345}, C_{12346}, C_{12356}$ را در نظر می‌گیریم. این دو دایره دو به دو در نقاط $z_{12345}, z_{12346}, z_{12356}, z_{12456}, z_{13456}, z_{23456}$ و z_{123456} متلاقی می‌کنند. اما فصل مشترک C_{123456} و C_{12346} غیر از نقطه z_{12346} است، همدیگر را قطع می‌کنند. اما نقاط $z_{12345}, z_{12346}, z_{12356}, z_{12456}, z_{13456}, z_{23456}$ همه بر دایره C_{123456} قرار دارند. لذا نقاط $z_{12345}, z_{12346}, z_{12356}, z_{12456}, z_{13456}, z_{23456}$ باید همدایره باشند. ولی اولین سه نقطه از این چهار نقطه بر دایره C_{123456} قرار دارند، بنابراین دایره C_{123456} از فصل مشترک C_{123456}, C_{12346} می‌گذرد.

اکنون دیگر می‌توان با کمک گرفتن از استقرای ریاضی کار را به همین نحو ادامه داد.

۴.۲ دایره نه نقطه

مثلث ABC داده شده است. مرکز دایره محیطی آن O ، را مبدأ در صفحه مختلط می‌گیریم و فرض می‌کنیم α, β, γ اعداد مختلطی به ترتیب معرف رأسهای A, B, C باشند. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود می‌توان شعاع دایره محیطی مثلث را ۱ فرض کرد، یعنی $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. پس طبیعی است سؤال کنیم که نقطه $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ در کجاست؟

چون داریم $\sigma - \alpha = \beta + \gamma$ و به علاوه $\frac{\beta + \gamma}{2}$ ، نقطه D وسط ضلع BC است، σ بر عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC واقع و طول $|\sigma - \alpha|$ دو برابر طول OD خواهد شد. با توجه به تقارن، σ بر عمود وارد از B بر CA و همچنین بر عمود مرسوم از C بر AB نیز قرار دارد. یعنی σ ، همان نقطه H ، محل برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ است. توجه دارید که نشان دادیم سه عمود مرسوم از رأسهای مثلث بر اضلاع مقابل در یک نقطه که مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ نامیده می‌شود متقارب‌اند.



شکل ۹.۲

اما $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ نقطه وسط پاره‌خطی است که مرکز دایره محیطی O را به H ، مرکز ارتفاعات، وصل می‌کند. فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا نقطه D ، وسط ضلع BC ، برابر است با

$$\left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

همین‌طور فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا نقطه E وسط ضلع CA ، و تا نقطه F وسط ضلع AB همه برابر $\frac{1}{2}$ است. علاوه بر این فاصله نقطه $\frac{\sigma}{2}$ تا وسط پاره‌خطی که مرکز ارتفاعات H را به رأس A وصل می‌کند

برابر است با

$$\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{1}{2}$$

همین طور فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا وسط BH و نیز تا وسط CH همه برابر $\frac{1}{2}$ است. برای یافتن λ ، پای عمود وارد از رأس A بر ضلع BC ، ابتدا نقطه α' ، محل تلاقی دیگر این عمود را با دایره محیطی مثلث حساب می‌کنیم. بنابراین α' باید در شرایط

$$\overrightarrow{\alpha\alpha'} \perp \overrightarrow{\beta\gamma}, \quad |\alpha'| = 1, \quad \alpha' \neq \alpha$$

صدق می‌نماید. از شرط اول نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} \quad \text{انگاری محض است}$$

یعنی

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\bar{\alpha} - \bar{\alpha}'}{\bar{\beta} - \bar{\gamma}} = 0$$

با قرار دادن $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ و غیزه، این رابطه به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} \left\{ 1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} \right\} = 0$$

پس

$$\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

برای آزمایش درستی محاسبات، ملاحظه می‌کنیم که $|\alpha'| = 1$ و $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha'} = -1$ و نیز $\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \arg\left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right) = \pi$ که می‌رساند، $\overrightarrow{\alpha\alpha'} \perp \overrightarrow{\beta\gamma}$ ، یعنی α' نقطه تلاقی دیگر عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC با دایره محیطی است. اما فواصل رأس B از α' و σ به ترتیب برابرند با

$$\left| \beta + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \cdot |\alpha + \gamma| = |\alpha + \gamma|$$

$$|\sigma - \beta| = |(\alpha + \beta + \gamma) - \beta| = |\alpha + \gamma|$$

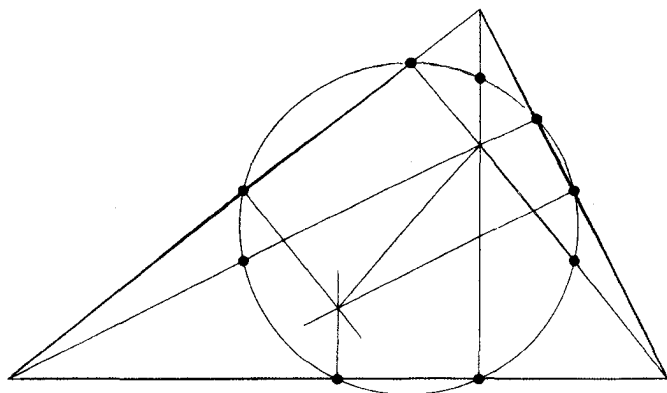
پس $\triangle \beta \alpha' \alpha$ یک مثلث متساوی الساقین است و

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sigma + \alpha') = \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

از اینجا نتیجه می شود که فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا λ (پای عمود مرسوم از رأس A بر ضلع BC) چنین است

$$\left|\lambda - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{\alpha'}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

همین طور فاصله $\frac{\sigma}{2}$ تا پاهای دیگر عمودها نیز برابر $\frac{1}{2}$ است.



شکل ۱۰.۲

به طور خلاصه چنین به دست آورده ایم.

قضیه ۱.۴.۲. (دایره نه نقطه). در هر مثلث:

(الف) پاهای عمودهای وارد از رأسها بر اضلاع مقابل؛

(ب) وسطهای اضلاع؛ و

(ج) وسطهای پاره خطهایی که مرکز ارتفاعات را به سه رأس وصل می کنند،

همه بر دایره ای واقع اند که مرکز آن وسط پاره خطی است که مرکز ارتفاعات را به مرکز دایره محیطی وصل می کند و شعاع آن نصف شعاع دایره محیطی است.

خط ماژر بر مرکز ارتفاعات، مرکز دایره محیطی، مرکزوار، و مرکز دایره نه نقطه به خط اوایلر مثلث معروف است.

فرض می‌کنیم z_1, z_2, z_3 سه نقطه دلخواه بر دایره واحد $|z| = 1$ باشند. پس مرکز دایره محیطی، مرکزوار، مرکز دایره نه نقطه و مرکز ارتفاعات $\Delta z_1 z_2 z_3$ به ترتیب عبارت‌اند از

$$0, \quad \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \quad \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3), \quad (z_1 + z_2 + z_3)$$

و شعاع دایره نه نقطه برابر $\frac{1}{4}$ است.

فرض می‌کنیم چهار نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 بر دایره واحد داده شده باشند. اگر هر بار سه نقطه از این چهار نقطه را اختیار کنیم، چهار مثلث به دست می‌آید (که همه آنها محاط در این دایره واحدند).

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_2 z_3 z_4$ نقطه $T_1 = \frac{1}{3}(z_2 + z_3 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_3 z_4$ نقطه $T_2 = \frac{1}{3}(z_1 + z_3 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_2 z_4$ نقطه $T_3 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_4)$ است،

مرکز دایره نه نقطه $\Delta z_1 z_2 z_3$ نقطه $T_4 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ است،

و شعاع همه آنها برابر $\frac{1}{4}$ است.
نقطه

$$T = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

$$|T - T_1| = |T - T_2| = |T - T_3| = |T - T_4| = \frac{1}{4}$$

بنابراین دایره‌های نه نقطه مثلث‌های:

$$\Delta z_2 z_3 z_4, \quad \Delta z_1 z_3 z_4, \quad \Delta z_1 z_2 z_4, \quad \Delta z_1 z_2 z_3$$

همه از نقطه

$$T = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

می‌گذرند. به خصوص مراکز چهار دایره نه نقطه فوق بر دایره‌ای به مرکز T و شعاع $\frac{1}{4}$ قرار دارند. این دایره را دایره نه نقطه چهار ضلعی $z_1 z_2 z_3 z_4$ می‌نامیم.

اکنون فرض می‌کنیم پنج نقطهٔ z_5, z_4, z_3, z_2, z_1 بر دایرهٔ واحد داده شده باشند. پس مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ چهار ضلعی $z_2 z_3 z_4 z_5$ نقطهٔ

$$\mu_1 = \frac{1}{4}(z_2 + z_3 + z_4 + z_5),$$

است و هکذا برای چهار ضلعیهای دیگر، و فاصله‌های این مراکز تا نقطهٔ

$$\mu = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$$

برابرند با

$$|\mu - \mu_1| = \frac{1}{4} \quad \text{و غیره.}$$

پس مراکز دواير نه نقطهٔ چهار ضلعیهای

$$z_1 z_2 z_3 z_4, \quad z_1 z_2 z_3 z_5, \quad z_1 z_2 z_4 z_5, \quad z_1 z_3 z_4 z_5, \quad z_2 z_3 z_4 z_5$$

بر دایره‌ای به مرکز $\mu = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ قرار دارند. این دایره را دایرهٔ نه نقطهٔ پنج ضلعی $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ می‌نامیم.

سپس، فرض کنید شش نقطهٔ $z_6, z_5, z_4, z_3, z_2, z_1$ بر دایرهٔ واحد داده شده باشند و ... از این روی یک رشتهٔ نامتناهی قضیه داریم که ج. ل. کولیج* آنها را کشف کرده است.

۵.۲ خط سیمسن

این بخش را با شرح مقدماتی دربارهٔ معادلهٔ خط آغاز می‌کنیم.

خطی مانند l داده شده است. فرض می‌کنیم α بردار واحد عمود بر l و p فاصلهٔ مبدأ تا خط l باشند. در این صورت به ازای هر نقطهٔ z بر l ، $z - p\alpha$ برداری است واقع بر خط l ، و چون α برداری است عمود بر l ، داریم:

$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} \quad \text{یک عدد انگاری محض است،}$$

* Julian. Lowell Coolidge, ریاضیدان معروف امریکایی مؤلف کتابهای، اصول هندسهٔ ناقلیدسی، هندسهٔ حوزهٔ اعداد مختلط، خمهای جبری مسطح و

یعنی

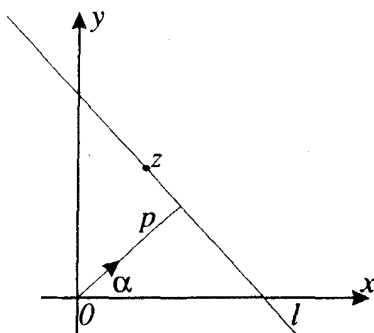
$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} + \frac{\bar{z} - p\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = 0.$$

پس معادله خط l چنین داده می‌شود

$$\therefore |k| = 1 \text{ و } k = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \text{ که } p \in \mathbb{R} \text{ یعنی } \frac{z}{\alpha} + \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} = 2p$$

برای به دست آوردن معادله خط عمود بر l فقط به جای α مقدار $i\alpha$ می‌گذاریم

$$\begin{aligned} \frac{z}{i\alpha} - \frac{\bar{z}}{i\bar{\alpha}} &= 2q \quad q \in \mathbb{R} \text{ به ازای مقداری مانند} \\ \left(k = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right), \quad z - k\bar{z} &= 2qi\alpha \quad \text{یعنی: } \frac{z}{\alpha} - \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} = 2qi \end{aligned}$$



شکل ۱۱.۲

که در آن ثابت طرف راست را می‌توان طوری اختیار کرد که خط از نقطه مشخصی بگذرد. باید توجه داشت که یک معادله خطی برحسب z و \bar{z} فقط و فقط وقتی معادله یک خط راست است که خودمزدوج باشد؛ یعنی نتیجه مزدوج مختلط گرفتن از طرفین معادله باید معادله‌ای هم ارز با معادله اولیه به دست دهد. مثلاً اگر مزدوج مختلط معادله:

$$z + k\bar{z} = 2p\alpha \quad \left(k = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}, p \in \mathbb{R} \text{ که در آن:}\right)$$

را به دست آوریم، خواهد شد:

$$\bar{z} + \bar{k}z = 2p\bar{\alpha}$$

با قرار دادن $\bar{k} = \frac{1}{k}$ این معادله به معادله:

$$k\bar{z} + z = 2p\bar{\alpha}k = 2p\alpha$$

بدل می‌شود که همان معادله اولیه است. همین‌طور است در مورد معادله

$$z - k\bar{z} = 2q i \alpha \quad \left(q \in \mathbb{R}, k = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right)$$

به‌خصوص، لازم (ولی نه کافی) است که ضرایب α و β z و \bar{z} در معادله

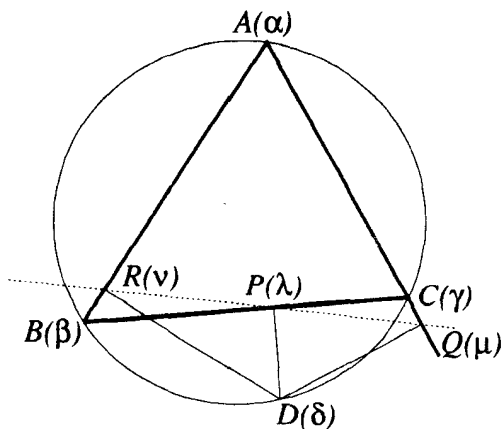
$$\alpha z + \beta \bar{z} = \gamma$$

قدرمطلقهای برابر داشته باشند؟ یعنی $|\alpha| = |\beta|$. از اینجا نتیجه می‌شود که معادله‌هایی مانند $z + \bar{z} = i$ یا $z - \bar{z} = 1$ معادله‌های خط نیستند.

اکنون آماده اثبات قضیه سیمسن هستیم.

قضیه ۱.۵.۲. نقطه‌ای مانند D و $\triangle ABC$ داده شده‌اند. فرض می‌کنیم P, Q, R پاهای عمودهای مرسوم از D به ترتیب بر اضلاع AB, CA, BC باشند. در این صورت P, Q, R همخط‌اند، اگر و فقط اگر D بر دایره محیطی $\triangle ABC$ باشد.

برهان. بدون اینکه خللی بر کلیت مسأله وارد آید، می‌توان فرض نمود که $\triangle ABC$ در دایره‌ای به شعاع واحد محاط شده‌است و نقاط A, B, C, D را به ترتیب با اعداد مختلط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$



شکل ۱۲.۲

نمایش می‌دهیم. در این صورت، معادله خط BC عبارت است از

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی

$$(\bar{\beta} - \bar{\gamma})z - (\beta - \gamma)\bar{z} + (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma) = 0$$

با استفاده از روابط $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ و $\bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ می‌توان این معادله را چنین نوشت

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma$$

از این رو، معادله عمود مرسوم از $D(\delta)$ بر ضلع BC چنین می‌شود

$$z - \beta\gamma\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta}$$

بنابراین، نقطه $P(\lambda)$ ، فصل مشترک این دو خط، از حل این دو معادله به‌دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{1}{\gamma}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta})$$

همین‌طور $Q(\mu)$ و $R(\nu)$ از روابط

$$\mu = \frac{1}{\gamma}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta})$$

$$\nu = \frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta})$$

به‌دست می‌آیند. اما،

$$P(\lambda), Q(\mu), R(\nu) \text{ همخط‌اند} \iff \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} \in \mathbb{R}$$

ولی با قرار داد $r = |\delta|$ (بنابراین $\bar{\delta} = \frac{r^2}{\delta}$)، داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} &= \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \beta\bar{\delta})}{(\gamma - \beta)(1 - \alpha\bar{\delta})} \\
 &= \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right) / \left(\frac{\alpha - \delta r^{-2}}{\beta - \delta r^{-2}} \right) \\
 &= (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2})
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 R, Q, P \iff (\alpha, \beta; \gamma, \delta r^{-2}) &\in \mathbb{R} \\
 \iff \alpha, \beta, \gamma, \delta r^{-2} &\text{ همدایره‌اند} \\
 \iff |\delta r^{-2}| = 1 \\
 \iff r = |\delta| = 1
 \end{aligned}$$

این خط را عموماً خط سیمسن نقطه D نسبت به $\triangle ABC$ گویند. ولی مۆرخان بیهوده این خط را در آثار رابرت سیمسن* (۱۶۸۷ - ۱۷۶۸) جستجو کرده‌اند. به نظر می‌رسد که اولین بار ویلیام والاس (۱۷۶۸ - ۱۸۴۳) در ۱۷۹۷ آن را مطرح کرده باشد.

اکنون می‌خواهیم معادله خط سیمسن را پیدا کنیم. همان قراردادهای قبلی را به کار می‌گیریم؛ به خصوص فرض می‌کنیم $\triangle ABC$ محاط در دایره واحد باشد و نقطه $D(\delta)$ بر این دایره واحد قرار داشته باشد. پس نقطه P پای عمود وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC ، چنین خواهد بود

$$z = \frac{1}{2} \left(\beta + \gamma + \delta - \frac{\beta\gamma}{\delta} \right)$$

اکنون نمادهای

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

را وارد می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \\
 \bar{\sigma}_3 &= \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}
 \end{aligned}$$

بدین ترتیب عبارتی که در بالا برای z به دست می‌آید چنین خواهد شد

$$z = \frac{1}{\gamma} \left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_2}{\delta \alpha} \right)$$

و

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{\gamma} \left(\bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha} + \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\delta} \bar{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta \alpha}{\sigma_2} \right) \end{aligned}$$

و از حذف α بین دو رابطه خواهیم داشت

$$\delta z - \sigma_2 \bar{z} = \frac{1}{\gamma} \left(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{\delta} \right)$$

این رابطه‌ای است که باید پای عمود $P(\lambda)$ ، وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC در آن صدق نماید. ولی، چون این رابطه فقط شامل $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ و لذا نسبت به α, β, γ متقارن است، نتیجه می‌شود که نقاط $Q(\mu)$ و $R(\nu)$ ، یعنی پاهای عمودهای مرسوم از نقطه $D(\delta)$ به ترتیب بر اضلاع CA و AB نیز باید در آن صدق کنند. ولی این معادله، معادله یک خط مستقیم است، لذا پاهای عمودهای P, Q, R همخط‌اند، و معادله به دست آمده، معادله خط سیمسن مربوطه است. این برهان دیگری است برای قسمت شرط لازم قضیه ۱.۵.۲.

قضیه ۲.۵.۲. گیریم L, M, N سه نقطه بر دایره محیطی $\triangle ABC$ باشند. شرط لازم و کافی برای تقارب خطوط سیمسن نقاط L, M, N نسبت به $\triangle ABC$ برقراری همنهشتی زیر است.

$$\widehat{AL} + \widehat{BM} + \widehat{CN} \equiv 0 \quad (2\pi \text{ پیمانه})$$

برهان. دایره محیطی $\triangle ABC$ را دایره واحد و u_1, u_2, u_3 را به ترتیب اعداد مختلط متناظر با نقاط L, M, N می‌گیریم. پس معادله‌های سه خط سیمسن مورد نظر عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} u_1 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{\gamma} \left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{u_1} \right) \\ u_2 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{\gamma} \left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{u_2} \right) \\ u_3 z - \sigma_3 \bar{z} &= \frac{1}{\gamma} \left(u_3^2 + \sigma_1 u_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_2}{u_3} \right) \end{aligned}$$

پس فصل مشترک دو خط اول سیمسن، نقطه

$$z = \frac{1}{2} \left(u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{u_1 u_2} \right)$$

و فصل مشترک دو خط دیگر، نقطه

$$z = \frac{1}{2} \left(u_2 + u_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{u_2 u_3} \right)$$

است، بنابراین، شرط لازم و کافی برای انطباق این دو نقطه، برقراری تساوی $\sigma_3 = u_1 u_2 u_3$ یعنی $\alpha\beta\gamma = u_1 u_2 u_3$ است.

چون $\alpha, \beta, \gamma, u_1, u_2, u_3$ اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ هستند، با برابر گرفتن شناسه‌های آنها به ترتیب با $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ خواهیم داشت.

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (2\pi \text{ پیمانه})$$

$$\therefore (\theta_1 - \varphi_1) + (\theta_2 - \varphi_2) + (\theta_3 - \varphi_3) \equiv 0 \quad (2\pi \text{ پیمانه})$$

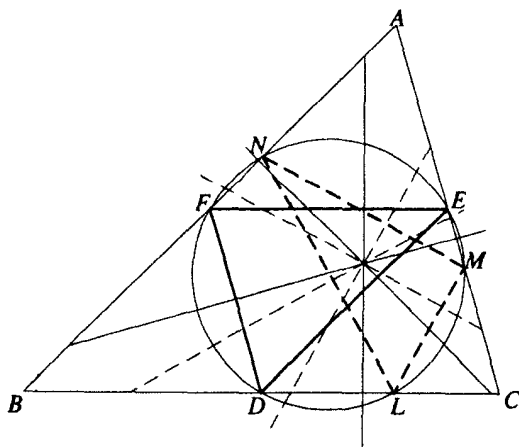
که شرط مطلوب است. ■

باید توجه کنیم که اگر این شرط برقرار باشد، نقطه فصل مشترک با تساوی زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned}$$

با توجه به تقارن این رابطه نسبت به مقادیر $\alpha, \beta, \gamma, u_1, u_2, u_3$ فرع زیر به دست می‌آید.

۳.۵.۲. A, B, C, L, M, N را شش نقطه بر یک دایره در نظر می‌گیریم. در این صورت خطهای سیمسن نقاط L, M, N نسبت به $\triangle ABC$ متقارب‌اند، اگر و فقط اگر خطوط سیمسن نقاط A, B, C نسبت به $\triangle LMN$ متقارب باشند. به علاوه، در این حالت، هر شش خط سیمسن در وسط پاره‌خطی که مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ و $\triangle LMN$ را به هم وصل می‌کند، متقارب‌اند.



شکل ۱۳.۲

فرع ۴.۵.۲. فرض می‌کنیم F, E, D به ترتیب وسطهای اضلاع AB, CA, BC از $\triangle ABC$ و N, M, L به ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A, B, C بر اضلاع مقابل باشند. در این صورت شش نقطه N, M, L, F, E, D بر دایره نه نقطه $\triangle ABC$ واقع اند و خطوط سیمنس نقاط N, M, L نسبت به $\triangle DEF$ متقاربانند. عکس این فرع نیز صحیح است. برهان. دایره محیطی $\triangle ABC$ را دایره واحد می‌گیریم و فرض می‌کنیم رأسهای A, B, C به ترتیب با اعداد مختلط α, β, γ متناظر باشند. در این صورت با توجه به بحث مربوط به دایره نه نقطه، نقاط N, M, L به ترتیب متناظر با اعداد مختلط:

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{\gamma\alpha}{\beta} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\sigma_1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha} \right)$$

و نقاط F, E, D متناظر با اعداد مختلط

$$\frac{1}{2}(\beta + \gamma), \quad \frac{1}{2}(\gamma + \alpha), \quad \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

خواهند شد. علاوه بر این، همه این شش نقطه بر دایره نه نقطه‌یی واقع‌اند که مرکز آن، نقطه $\frac{\sigma_1}{3}$ و شعاع آن $\frac{1}{3}$ است. از این رو داریم

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &: -\frac{\beta\gamma}{2\alpha}, & \overrightarrow{KM} &: -\frac{\gamma\alpha}{2\beta}, & \overrightarrow{KN} &: -\frac{\alpha\beta}{2\gamma} \\ \overrightarrow{KD} &: -\frac{\alpha}{2}, & \overrightarrow{KE} &: -\frac{\beta}{2}, & \overrightarrow{KF} &: -\frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right) \cdot \left(-\frac{\gamma\alpha}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) = \left(-\frac{\alpha}{2}\right) \left(-\frac{\beta}{2}\right) \left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

حکم برقرار و قضیه ثابت شده است.

۶.۲ تعمیمهای قضیهٔ سیمسن

اکنون برهان سادهٔ دیگری برای قضیهٔ سیمسن ۱.۵.۲ اقامه می‌کنیم که تعمیم آن است.

قضیهٔ ۱.۶.۲. فرض کنید P, Q, R پاهای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه D ، به ترتیب بر اضلاع BC, CA, AB از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت P, Q, R همخط‌اند، اگر و فقط اگر، D بر دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد.

برهان. چون $\angle DPC = \angle DRB (= \frac{\pi}{2})$ ، نقاط P, R, B, D هم‌دایره‌اند. این دایره را S_B می‌نامیم. همین‌طور نقاط P, Q, C, D نیز هم‌دایره‌اند. این دایره را S_C می‌نامیم. اکنون لم ۱.۳.۲ برای قضیه‌های کلی‌تر را در مورد S_B, S_C, AC, AB, S_C به کار می‌بریم:

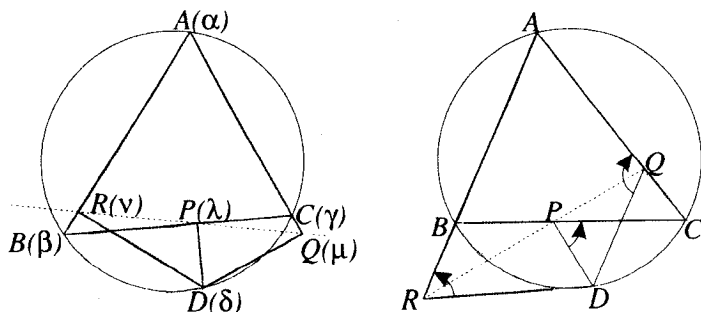
دایرهٔ S_B و خط AB در B و R متلاقی‌اند؛

خطوط AB و AC در A و ∞ متلاقی‌اند؛

خط AC و دایرهٔ S_C در C و Q متلاقی‌اند؛

دایره‌های S_B و S_C در D و P متلاقی‌اند؛

بنابراین: P, Q, R همخط‌اند $\iff R, Q, \infty, P$ هم‌دایره‌اند $\iff B, C, A, D$ هم‌دایره‌اند. ■



شکل ۱۴.۲

قضیهٔ ۲.۶.۲. فرض می‌کنیم P, Q, R به ترتیب نقطه‌هایی بر اضلاع BC, CA, AB

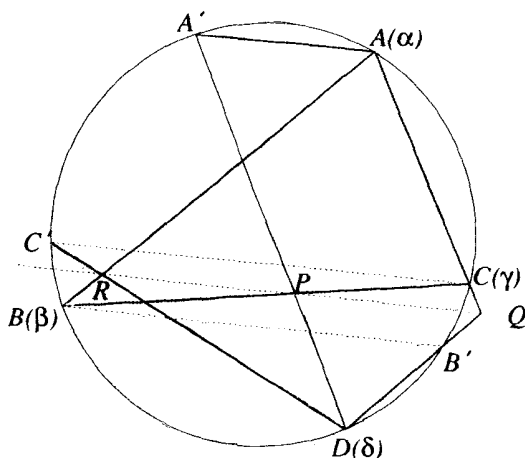
(یا امتداد آنها) از $\triangle ABC$ باشند و فرض می‌کنیم D نقطه‌ای با خصوصیت زیر باشد:

$$\angle DPC \equiv \angle DQA \equiv \angle DRB \quad (\text{پیمانه } \pi)$$

که در آن همه زوایا جهت‌دار فرض شده‌اند. در این صورت نقاط P, Q, R همخطاند، اگر و فقط اگر نقطه D بر دایره محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد. برهان. درست به همان صورت قضیه قبلی است. ■

به عنوان فرع، قضیه زیر را به دست می‌آوریم:

قضیه ۳.۶.۲. (اُبِرْت)^۱. فرض کنید A, B, C, D, C', B', A' هفت نقطه D هم‌دایره چنان باشند که $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ و P, Q, R به ترتیب فصل مشترک‌های AA', BB', CC' و $B'D, BC$ و $A'D, CA$ و AB باشند، در این صورت P, Q, R همخطاند و خطی که از این سه نقطه می‌گذرد موازی AA', BB', CC' است. برهان دیگر. بدون اینکه از کلیت کاسته شود، می‌توان دایره مورد نظر را دایره واحد فرض کرد. فرض کنید نقاط A, B, C, D به ترتیب با اعداد مختلط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ نمایش داده شده‌اند. پس



شکل ۱۵.۲

معادلات خطوط موازی AA', BB', CC' به ترتیب چنین خواهند شد

$$z + k\bar{z} = \alpha + k\bar{\alpha}, \quad z + k\bar{z} = \beta + k\bar{\beta}, \quad z + k\bar{z} = \gamma + k\bar{\gamma}$$

که در آن k عدد مختلط مناسبی است با $|k| = 1$. از اینجا نتیجه می‌شود که نقاط C', B', A' به ترتیب با اعداد مختلط $k\bar{\alpha}$, $k\bar{\beta}$, و $k\bar{\gamma}$ داده می‌شوند. پس نقطهٔ P , فصل مشترک خطوط BC و $A'D$ باید جواب دستگاه همزمان

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma, \quad z + \delta k\bar{\alpha}\bar{z} = \delta + k\bar{\alpha}$$

باشد. از حذف z بین این دو معادله

$$\therefore (\beta\gamma - k\delta\bar{\alpha})\bar{z} = \beta + \gamma - \delta - k\bar{\alpha}$$

از ضرب طرفین این تساوی در α خواهیم داشت

$$(\alpha\beta\gamma - k\delta)\bar{z} = \alpha\beta + \gamma\alpha - \delta\alpha - k$$

با استفاده از قراردادهای

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

تساوی اخیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(\sigma_3 - k\delta)\bar{z} = \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} - \delta\alpha - k$$

با گرفتن مزدوج مختلط و ضرب طرفین آن در $k\delta\sigma_3$ خواهیم داشت

$$(k\delta - \sigma_3)z = \sigma_1 k\delta - k\delta\alpha - \frac{k\sigma_3}{\alpha} - \sigma_2\delta$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود که

$$(k\delta - \sigma_3)(z + k\bar{z}) = k^2 + \sigma_1 k\delta - \sigma_2 k - \sigma_2\delta$$

این رابطه‌ای است که باید نقطهٔ P در آن صدق نماید. اما این رابطه نسبت به α, β, γ متقارن است، پس نقاط Q و R نیز در آن صدق می‌نمایند. از طرف دیگر، این معادله، معادلهٔ خطی است موازی با CC', BB', AA' (به شرط $k\delta - \sigma_3 \neq 0$). بنابراین، نقاط P, Q, R همخطاند و خطی که از این سه نقطه می‌گذرد موازی با CC', BB', AA' است.

در حالتی که $k\delta = \sigma_2$ ، داریم

$$BC \parallel A'D, \quad CA \parallel B'D, \quad AB \parallel C'D$$

■ و لذا نقاط R, Q, P بر نقطهٔ بینهایت منطبق‌اند و نتیجه به‌طور بدیهی صحیح است.

در پایان این بخش، یک دنبالهٔ نامتناهی دیگری را معرفی می‌نماییم. اما ابتدا مطلب را با حالت چهار نقطه آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۶.۲. فرض می‌کنیم چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ محاط در یک دایره و P نقطه‌ای دلخواه بر دایرهٔ محیطی آن باشد. در این صورت D_1, D_2, D_3, D_4 پاهای عمودهای وارد از P بر خطوط سیمسن نقطهٔ P نسبت به مثلثهای

$$\triangle A_2 A_3 A_4, \quad \triangle A_1 A_3 A_4, \quad \triangle A_1 A_2 A_4, \quad \triangle A_1 A_2 A_3$$

همخط‌اند. این خط را خط سیمسن نقطهٔ P نسبت به چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ گویند.

برهان. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان دایرهٔ محیطی چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ را دایرهٔ واحد فرض کرد، و اعداد مختلط u_1, u_2, u_3, u_4 و u را به‌ترتیب معرف نقاط A_1, A_2, A_3, A_4 و P گرفت. در این صورت معادلهٔ خط سیمسن نقطهٔ $P(u)$ نسبت به $\triangle A_2 A_3 A_4$ چنین خواهد شد

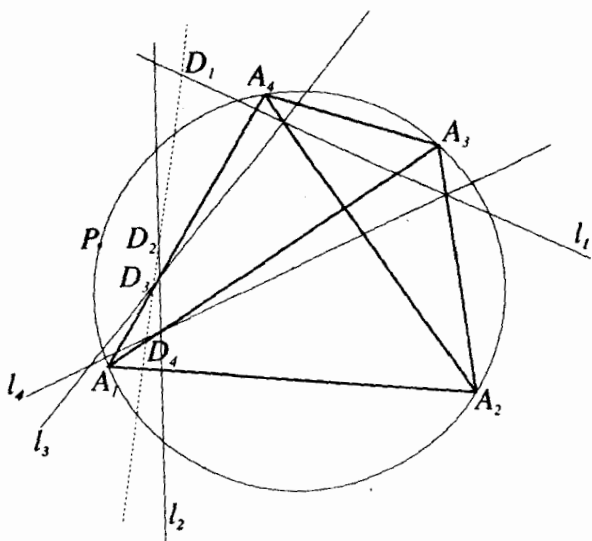
$$u_z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} = \frac{1}{4} \left\{ u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u - (u_2 u_3 + u_3 u_2 + u_2 u_4) - \frac{u_2 u_3 u_4}{u} \right\}$$

پس معادلهٔ خط عمود مرسوم از نقطهٔ $P(u)$ بر این خط سیمسن چنین خواهد شد

$$u z + u_2 u_3 u_4 \bar{z} = u^2 + \frac{u_2 u_3 u_4}{u}$$

بنابراین D_1 ، نقطهٔ تلاقی این دو خط از تساوی

$$2u z = \frac{1}{4} \left\{ 3u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u - (u_2 u_3 + u_3 u_2 + u_2 u_4) + \frac{u_2 u_3 u_4}{u} \right\}$$



شکل ۱۶.۲

به دست می‌آید. با استفاده از قراردادهای

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$\sigma_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4$$

$$\sigma_3 = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4$$

$$\sigma_4 = u_1u_2u_3u_4$$

رابطهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} u^T z &= \frac{1}{4} \left\{ 3u^T + (\sigma_1 - u_1)u^T - (\sigma_2 - \sigma_1 u_1 + u_1^2)u + \frac{\sigma_4}{u_1} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (3u^T + \sigma_1 u^T + \sigma_2 u) - (u_1 u^T - \sigma_1 u_1 u + u_1^2 u) + \frac{\sigma_4}{u_1} \right\} \end{aligned}$$

با گرفتن مزدوج مختلط از دو طرف این رابطه و استفاده از روابط

$$\overline{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}, \quad \overline{\sigma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}, \quad \overline{\sigma_4} = \frac{1}{\sigma_4}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{u^2}{4} \left\{ \left(\frac{3}{u^2} + \frac{\sigma_r}{\sigma_r u^2} - \frac{\sigma_r}{\sigma_r u} \right) - \left(\frac{1}{u_1 u^2} - \frac{\sigma_r}{\sigma_r u_1 u} + \frac{1}{u_1^2 u} \right) + \frac{u_1}{\sigma_r} \right\} \\ \therefore \sigma_r \bar{z} &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{3\sigma_r}{u} + \sigma_r - \sigma_r u \right) - \left(\frac{\sigma_r}{u_1} - \frac{\sigma_r u}{u_1} + \frac{\sigma_r u}{u_1^2} \right) + u_1 u^2 \right\}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}u^2 z + \sigma_r \bar{z} &= \frac{1}{4} \left\{ \left(3u^2 + \sigma_1 u^2 - \sigma_r u + \sigma_r + \frac{3\sigma_r}{u} \right) \right. \\ &\quad \left. + u \left(\sigma_1 u_1 - u_1^2 - \sigma_r + \frac{\sigma_r}{u_1} - \frac{\sigma_r}{u_1^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(3u^2 + \sigma_1 u^2 - \sigma_r u + \sigma_r + \frac{3\sigma_r}{u} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u}{u_1^2} (u_1^2 - \sigma_1 u_1^2 + \sigma_r u_1^2 - \sigma_r u_1 + \sigma_r) \right\}\end{aligned}$$

چون u_1 یک ریشهٔ معادلهٔ

$$u^2 - \sigma_1 u^2 + \sigma_r u^2 - \sigma_r u + \sigma_r = 0$$

است، خواهیم داشت

$$u^2 z + \sigma_r \bar{z} = \frac{1}{4} \left(3u^2 + \sigma_1 u^2 - \sigma_r u + \sigma_r + \frac{3\sigma_r}{u} \right)$$

این رابطه، رابطه‌ای است که D_1 در آن صدق می‌کند. ولی به دلیل تقارن، D_2 ، D_3 ، D_4 نیز باید در آن صدق کنند. از طرف دیگر، این معادله، معادلهٔ یک خط راست است، بنابراین نقاط D_1 ، D_2 ، D_3 ، D_4 همخط‌اند. ■

حال فرض کنید یک پنج ضلعی محاط در یک دایره، و P نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی آن باشد و....

۷.۲ قضیه‌های کانتور

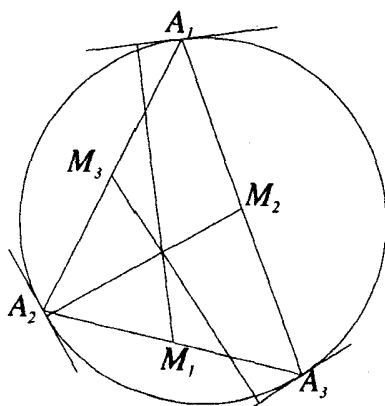
باز مطلب را با حالت سادهٔ ذیل آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۷.۲. (م. ب. کانتور). سه عمود وارد از وسطهای اضلاع یک مثلث بر مماسهای مرسوم بر دایره محیطی آن در رأسهای متقابل، در مرکز دایره نه نقطه این مثلث متقارب‌اند. برهان. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می‌توان دایره محیطی $\triangle A_1 A_2 A_3$ را دایره واحد فرض کرد. خاطرنشان می‌سازیم که معادله خطی که از نقاط α و β واقع بر دایره واحد می‌گذرد چنین است

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

چون خط مماس بر دایره واحد در α ، همان حالت خاص قاطع است وقتی که β بر α منطبق شود، پس معادله مماس در α چنین خواهد شد

$$z + \alpha^2\bar{z} = 2\alpha$$



شکل ۱۷.۲

اعداد مختلط متناظر با رأسهای A_3, A_2, A_1 را به ترتیب با u_3, u_2, u_1 نمایش می‌دهیم. پس معادله مماس در نقطه A_1 عبارت است از

$$z + u_1^2\bar{z} = 2u_1$$

بنابراین معادله عمود وارد از نقطه $M_1 \left(\frac{u_2 + u_3}{2} \right)$ ، وسط ضلع $A_2 A_3$ ، بر این خط مماس چنین خواهد شد

$$z - u_1^2\bar{z} = \frac{1}{2}\{(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)\}$$

از قرار دادن مختصات مرکز دایره نه نقطه $\Delta A_1 A_2 A_3$ ، یعنی $\frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)$ ، در طرف چپ این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\{(u_1 + u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3)\} \\ &= \frac{1}{3}\{(u_2 + u_3) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3)\} \quad (\because u_1 \bar{u}_1 = 1), \end{aligned}$$

که درست برابر طرف راست معادله است. از این رو مرکز دایره نه نقطه در معادله عمود مرسوم از M_1 بر مماس در A_1 صدق می‌کند. همین‌طور، مرکز دایره نه نقطه، بر عمودهای مرسوم از M_2 و M_3 بر مماسهای در رأسهای مقابل مربوطه نیز واقع است. ■

قضیه ۲.۷.۲. (م. ب. کانتورا). فرض می‌کنیم n نقطه بر یک دایره داده شده باشند. از مرکزوار هر $n - 1$ نقطه از این نقاط، عمودی بر مماس مرسوم بر دایره در نقطه باقیمانده، وارد می‌نمائیم. در این صورت، این n عمود در یک نقطه متقاربانند.

برهان. اثبات این قضیه، عملاً درست به همان صورت قضیه قبلی صورت می‌گیرد. n نقطه u_1, u_2, \dots, u_n را بر دایره واحد اختیار می‌کنیم. معادله مماس در u_1 بر دایره چنین است: $z + u_1^2 \bar{z} = 2u_1$. پس معادله عمود مرسوم از مرکزوار نقاط u_2, u_3, \dots, u_n یعنی نقطه

$$\frac{1}{n-1}(u_2 + u_3 + \dots + u_n) = \frac{(\sigma - u_1)}{n-1} \quad (\sigma = u_1 + u_2 + \dots + u_n)$$

بر این مماس عبارت است از:

$$\begin{aligned} z - u_1^2 \bar{z} &= \frac{1}{n-1}\{(u_2 + u_3 + \dots + u_n) - u_1^2(\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \dots + \bar{u}_n)\} \\ &= \frac{1}{n-1}\{(\sigma - u_1) - u_1^2(\bar{\sigma} - \bar{u}_1)\} \\ &= \frac{1}{n-1}(\sigma - u_1^2 \bar{\sigma}) \end{aligned}$$

واضح است که نقطه

$$\frac{1}{n-1}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{\sigma}{n-1}$$

در این معادله صدق می‌کند. ■

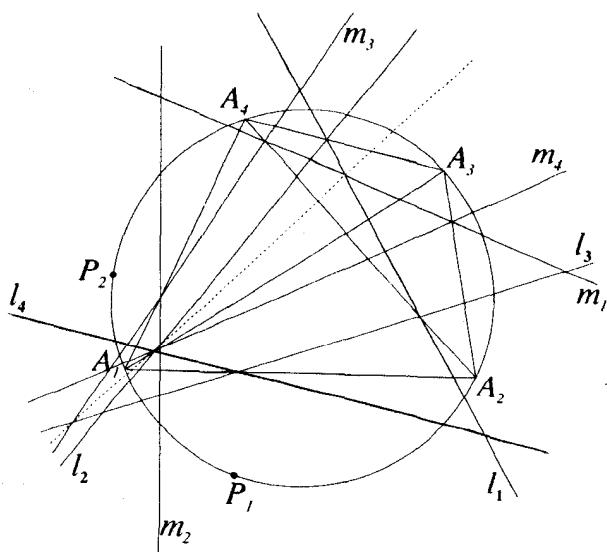
هم‌اکنون به بیان دنباله نامتناهی دیگری از قضایا که م. ب. کانتور (۱۸۲۹ - ۱۹۲۰) کشف کرده مبادرت می‌ورزیم.

قضیه ۳.۷.۲. $P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, A_4$ را شش نقطه همدايره می‌گیریم. چهار نقطه اشتراک چهار زوج سیمسن مربوط به نقاط P_1 و P_2 نسبت به مثلثهای

$$\triangle A_2 A_3 A_4, \triangle A_1 A_3 A_4, \triangle A_1 A_2 A_4, \triangle A_1 A_2 A_3$$

همخط‌اند. این خط را خط کانتور دو نقطه P_1 و P_2 نسبت به چهارضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ گویند. برهان. بی‌آنکه به کلیت مطلب خللی وارد آید، می‌توان فرض کرد که هر شش نقطه بر دایره واحد قرار دارند و این نقاط را به ترتیب با اعداد مختلط u_1, u_2, u_3, u_4 و t_1, t_2 نمایش می‌دهیم. بنابراین معادله‌های خطوط سیمسن نقاط $P_1(t_1)$ و $P_2(t_2)$ نسبت به $\triangle A_2 A_3 A_4$ چنین خواهند شد

$$\begin{aligned} t_1 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} \\ = \frac{1}{4} \left\{ t_1^2 + (u_2 + u_3 + u_4)t_1 - (u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_1} \right\}, \\ t_2 z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} \\ = \frac{1}{4} \left\{ t_2^2 + (u_2 + u_3 + u_4)t_2 - (u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4) - \frac{u_2 u_3 u_4}{t_2} \right\}. \end{aligned}$$



شکل ۱۸.۲

پس نقطه تلاقی این دو خط چنین خواهد شد

$$z = \frac{1}{\gamma} \left[t_1 + t_2 + (u_2 + u_3 + u_4) + \frac{u_2 u_3 u_4}{t_1 t_2} \right]$$

با قرار دادن

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

$$\sigma_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4$$

$$\sigma_3 = u_2 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_2 u_3$$

$$\sigma_4 = u_1 u_2 u_3 u_4$$

رابطه بالا چنین نوشته می‌شود

$$z = \frac{1}{\gamma} \left\{ t_1 + t_2 + \sigma_1 - u_1 + \frac{\sigma_4}{t_1 t_2 u_1} \right\}$$

و بنابراین

$$\bar{z} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_4} - \frac{1}{u_1} + \frac{t_1 t_2 u_1}{\sigma_4} \right\}$$

با حذف u_1 از این دو رابطه، خواهیم داشت

$$t_1 t_2 z + \sigma_4 \bar{z} = \frac{1}{\gamma} \left\{ (t_1 + t_2) t_1 t_2 + \sigma_1 t_1 t_2 + \sigma_2 + \frac{\sigma_4 (t_1 + t_2)}{t_1 t_2} \right\}$$

این رابطه‌ای است که باید نقطه تلاقی خطوط سیمسن نقاط P_1 و P_2 نسبت به $\Delta A_1 A_2 A_3$ در آن صدق نماید. اما این رابطه نسبت به u_1, u_2, u_3, u_4 متقارن است و لذا باید نقطه تقاطع دو خط سیمسن نقاط P_1 و P_2 نسبت به $\Delta A_1 A_2 A_3$, $\Delta A_1 A_2 A_4$, $\Delta A_1 A_3 A_4$ در آن صدق کند. از طرف دیگر این رابطه معادله یک خط راست است. بنابراین، این چهار نقطه تلاقی همخط‌اند. ■

قضیه ۴.۷.۲. فرض کنید $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ هفت نقطه هم‌دایره باشند. سه خط کانتور سه‌زوج: نقاط P_1, P_2, P_3 و P_1, P_2 نسبت به چهارضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ متقارب‌اند. این نقطه تقارب را نقطه کانتور سه‌نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهارضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ گویند.

برهان. به‌روال پیش، فرض می‌کنیم دایره موردنظر، دایره واحد باشد و $t_1, u_1, u_2, u_3, u_4, t_1$ اعداد مختلطی به‌ترتیب معرف نقاط $A_1, A_2, A_3, A_4, P_1, P_2, P_3$ هستند. بنابراین معادله‌های خطوط کانتور زوجهای نقاط: P_2, P_3, P_1 و P_2, P_3 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ چنین خواهد شد:

$$t_2 t_3 z + \sigma_2 \bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ (t_2 + t_3) t_2 t_3 + \sigma_1 t_2 t_3 + \sigma_2 + \frac{\sigma_2 (t_2 + t_3)}{t_2 t_3} \right\},$$

$$t_3 t_1 z + \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ (t_3 + t_1) t_3 t_1 + \sigma_1 t_3 t_1 + \sigma_3 + \frac{\sigma_3 (t_3 + t_1)}{t_3 t_1} \right\}.$$

لذا نقطه تقاطع آنها چنین است

$$z = \frac{1}{2} \left\{ t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{t_1 t_2 t_3} \right\}.$$

اما این عبارت نسبت به t_1, t_2, t_3 متقارن است و لذا خط کانتور دوقطه P_1 و P_2 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ نیز از این نقطه می‌گذرد. بنابراین، این نقطه باید نقطه کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ باشد. ■

قضیه ۵.۷.۲. فرض می‌کنیم $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P_1, P_2, P_3$ هشت نقطه همدایره باشند. در این صورت پنج نقطه کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهارضلعیهای

$$A_2A_3A_4A_5, A_1A_2A_4A_5, A_1A_2A_3A_5, A_1A_2A_3A_5, A_1A_2A_3A_4$$

همخط‌اند. این خط را خط کانتور ۳ نقطه P_1, P_2, P_3 و P_2 نسبت به پنج ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ گویند.

برهان. همانند قبل، فرض می‌کنیم دایره موردنظر دایره واحد باشد، و $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, t_1, t_2, t_3$ اعداد مختلطی باشند که به‌ترتیب نقاط $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P_1, P_2, P_3$ را نشان می‌دهند. بنابراین نقطه کانتور سه نقطه P_1, P_2, P_3 نسبت به چهارضلعی $A_2A_3A_4A_5$ چنین است.

$$z = \frac{1}{2} \left\{ t_1 + t_2 + t_3 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - \frac{u_2 u_3 u_4 u_5}{t_1 t_2 t_3} \right\}.$$

با قرار دادن

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5,$$

$$\sigma_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_1 u_5 + u_2 u_3 \\ + u_2 u_4 + u_2 u_5 + u_3 u_4 + u_3 u_5 + u_4 u_5,$$

$$\sigma_3 = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_2 u_5 + u_1 u_3 u_4 + u_1 u_3 u_5 \\ + u_1 u_4 u_5 + u_2 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_5 + u_2 u_4 u_5 + u_3 u_4 u_5,$$

$$\sigma_4 = u_2 u_3 u_4 u_5 + u_1 u_3 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_4 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_5 + u_1 u_2 u_3 u_4,$$

$$\sigma_5 = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5,$$

رابطه بالا چنین می شود

$$z = \frac{1}{4} \left\{ t_1 + t_2 + t_3 + \sigma_1 - u_1 - \frac{\sigma_5}{u_1 t_1 t_2 t_3} \right\}.$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{\sigma_4}{\sigma_5} - \frac{1}{u_1} - \frac{u_1 t_1 t_2 t_3}{\sigma_5} \right\}.$$

با حذف u_1 از این دو رابطه خواهیم داشت

$$t_1 t_2 t_3 z - \sigma_5 \bar{z} \\ = \frac{1}{4} \left\{ (t_1 + t_2 + t_3) t_1 t_2 t_3 + \sigma_1 t_1 t_2 t_3 - \sigma_4 - \frac{\sigma_5 (t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2)}{t_1 t_2 t_3} \right\}.$$

این رابطه ای است که باید نقطه کانتور سه نقطه P_2, P_3, P_1 نسبت به چهارضلعی $A_2 A_3 A_4 A_5$ در آن صدق کند. ولی این رابطه نسبت به A_5, A_4, A_3, A_2, A_1 متقارن است و بنابراین بایستی سه نقطه کانتور P_2, P_3, P_1 نسبت به چهارضلعیهای $A_1 A_2 A_3 A_5, A_1 A_2 A_4 A_5, A_1 A_3 A_4 A_5$ نیز در آن صدق کنند. از طرف دیگر این معادله، معادله یک خط راست است. پس این پنج نقطه کانتور باید همخط باشند. ■

اکنون فرض کنید نه نقطه همدایره $P_4, P_3, P_2, P_1, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$ را داشته باشید،

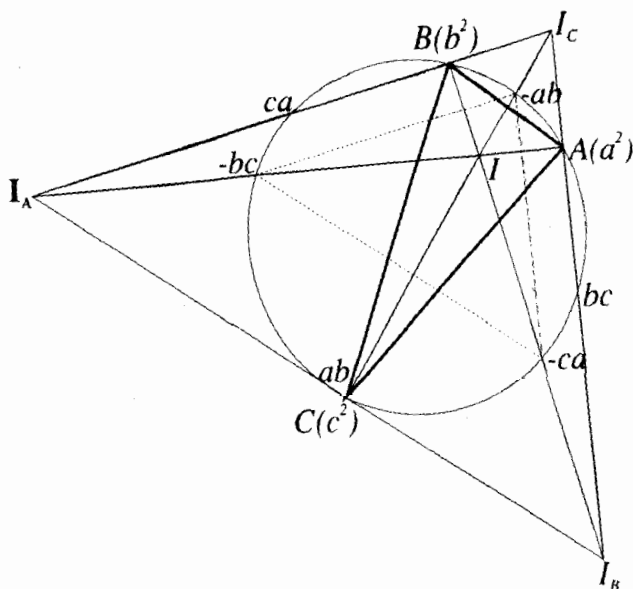
پس،

۸.۲ قضیه فویرباخ

فرض می کنیم H مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ باشد. با توجه به اینکه دایره نه نقطه $\triangle ABC$ ، دایره نه نقطه $\triangle HAB, \triangle HCA, \triangle HBC$ و نیز هست، قضیه زیر منسوب به ک. و. فویرباخ

(۱۸۰۰ - ۱۸۳۴)، دبیر دبیرستان ارلانگن، آلمان، که در سال ۱۸۲۲ آن را کشف کرده، به راستی جالب است.

قضیه ۱.۸.۲. (فویرباخ). دایره نه نقطه مثلث، بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی آن مماس است (شکل ۱۹.۲).



شکل ۱۹.۲

برهان. بی آنکه خللی در کلیت حاصل شود، می توان فرض کرد $\triangle ABC$ در دایره واحد محاط است. برای اجتناب از به کار بردن علامتهای دست و پاگیر ریشه دوم، فرض می کنیم رأسهای A, B, C به ترتیب با اعداد مختلط a^2, b^2, c^2 نمایش داده شوند.

نیمساز (داخلی) رأس A از وسط آن کمان \widehat{BC} که شامل رأس A (در خود $\angle A$) نیست می گذرد، در صورتی که نیمساز خارجی رأس A از وسط آن کمان \widehat{BC} که شامل رأس A (در خود $\angle A$) است می گذرد. نقطه اخیر را نقطه bc می نامیم. پس نقطه اولی باید $-bc$ باشد. همین طور اگر وسط آن کمان \widehat{CA} را که شامل رأس B (در خود $\angle B$) است، ca بگیریم، وسط آن کمان \widehat{CA} که شامل رأس B (در خود $\angle B$) نیست، $-ab$ خواهد شد. (توجه کنید که همواره این کار، در صورت لزوم، با تغییر علامت (های) a, b, c میسر است. مثلاً فرض می کنیم A, B, C به طور پادساعتسو بر دایره واحد واقع باشند و نقطه A در $z = 1$ باشد. a, b, c را چنان اختیار می کنیم که $q = -1$ و $0 < \arg b < \pi$ و $-\pi < \arg c < 0$). بنابراین معادلات سه نیمساز (داخلی)

به ترتیب خواهند شد:

$$z - a^2 bc \bar{z} = a^2 - bc,$$

$$z - ab^2 c \bar{z} = b^2 - ca,$$

$$z - abc^2 \bar{z} = c^2 - ab,$$

از حل این دستگاه همزمان با انتخاب دو معادله از این سه معادله داریم

$$z = -(bc + ca + ab).$$

طبق معمول، چنانچه قرار دهیم

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = bc + ca + ab, \quad \sigma_3 = abc,$$

نقطه تلاقی فوق $z = -\sigma_2$ خواهد شد. واضح است که این نقطه در معادله سوم باقی مانده (بنابر تقارن) صدق خواهد کرد. پس نشان داده‌ایم که سه نیمساز داخلی یک مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطه تقاطع را مرکز درونی مثلث گویند.

اما نقطه $I : -\sigma_2 = -bc - ca - ab$ نیز مرکز ارتفاعهای مثلثی است با رأسهای $-ab$ ، $-ca$ ، $-bc$. این مطلب از مقایسه معادله نیمساز (داخلی) رأس A و معادله خطی که دونقطه $-ab$ و $-ca$ را بهم وصل می‌کند یعنی:

$$z + a^2 bc \bar{z} = -ca - ab.$$

روشن می‌شود. این امر برای دونیمساز دیگر نیز درست است. مشاهده مشابه نشان می‌دهد که مراکز دوائر محاطی خارجی I_C ، I_B ، I_A مرکز ارتفاعات مثلثی به رأسهای:

$$-bc, ab, ca;$$

$$-ca, bc, ab;$$

$$-ab, ca, bc;$$

هستند. چون همه این مثلثها محاط در دایره واحدند، داریم:

$$I_A : -bc + ab + ca$$

$$I_B : -ca + bc + ab$$

$$I_C : -ab + ca + bc$$

اکنون d ، فاصله بین مرکز دایره محاطی داخلی و مرکز دایره نه نقطه $\triangle ABC$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{1}{r} (a^2 + b^2 + c^2) + \sigma_r \right| \\ &= \frac{1}{r} |a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab)| \\ &= \frac{1}{r} |(a + b + c)^2| = \frac{1}{r} \sigma_1 \bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\sigma_r} \end{aligned}$$

می‌دانیم که شعاع دایره نه نقطه $\frac{1}{r}$ است. شعاع دایره محاطی داخلی را حساب می‌کنیم: معادله خط BC عبارت است از:

$$z + b^2 c^2 \bar{z} = b^2 + c^2$$

و لذا معادله عمود مرسوم از مرکز دایره محاطی داخلی $I(-\sigma_r)$ بر ضلع BC چنین است

$$z - b^2 c^2 \bar{z} = -\sigma_r + b^2 c^2 \bar{\sigma}_r = -\sigma_r + \frac{bc\sigma_1}{a}$$

پس پای این عمود با

$$z = \frac{1}{r} \left(b^2 + c^2 - \sigma_r + \frac{bc\sigma_1}{a} \right)$$

داده می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که شعاع دایره محاطی داخلی عبارت است از

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{1}{r} \left(b^2 + c^2 - \sigma_r + \frac{bc\sigma_1}{a} \right) + \sigma_r \right| \\ &= \frac{1}{r} |a(b^2 + c^2) + a\sigma_r + bc\sigma_1| \\ &= \frac{1}{r} |\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_r| \\ &= \left| \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\sigma_r} - \frac{1}{r} \right| = \left| d - \frac{1}{r} \right| \end{aligned}$$

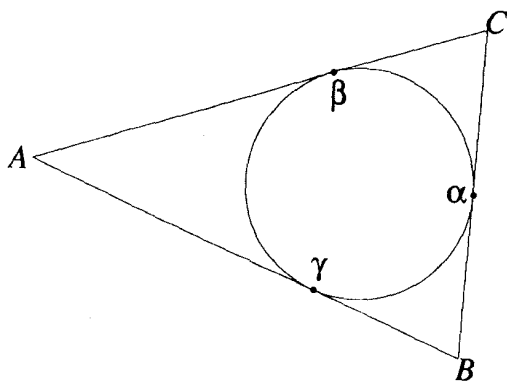
که در آن از واقعیت $|a| = 1 = |\sigma_3|$ استفاده شده است. به آسانی می توان تحقیق کرد که: $d \leq \frac{1}{4}$ ، بنابراین داریم:

$$d = \frac{1}{4} - r \quad \text{یعنی} \quad r = \frac{1}{4} - d$$

که نشان می دهد دایره نه نقطه و دایره محاطی داخلی مماس داخل اند. برای اینکه ثابت کنیم دایره نه نقطه بر دایره محاطی خارجی I_A مماس است، فقط باید به جای a ، $-a$ قرار دهیم و استدلال بالا را تکرار کنیم. ■

برهان دیگر. در برهانی که در کتاب پ. ج. دیویس تحت عنوان، تابع شوارتز و کاربردهای آن آمده است، دایره واحد، نه به عنوان دایره محیطی، بلکه به عنوان دایره محاطی داخلی $\triangle ABC$ گرفته شده است. فرض می کنیم نقاط تماس اضلاع BC ، CA ، و AB با دایره واحد به ترتیب α ، β ، و γ باشند. پس معادلات این سه ضلع چنین هستند

$$z + \alpha^2 \bar{z} = 2\alpha, \quad z + \beta^2 \bar{z} = 2\beta, \quad z + \gamma^2 \bar{z} = 2\gamma$$



شکل ۲۰.۲

از حل این دستگاههای معادلات همزمان دو به دو، رأسهای A ، B ، و C با اعداد مختلط زیر مشخص می شوند.

$$A : \frac{2\beta\gamma}{\beta + \gamma}, \quad B : \frac{2\gamma\alpha}{\gamma + \alpha}, \quad C : \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

از این رو نقطه L وسط ضلع BC خواهد شد

$$\begin{aligned}\alpha \left(\frac{\gamma}{\gamma + \alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) &= \frac{(\gamma\beta + \gamma\alpha + \alpha\beta)(\alpha\beta + \gamma\alpha)}{(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)} \\ &= \frac{(\sigma_1 + \beta\gamma)(\sigma_1 - \beta\gamma)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\sigma_1^2 - (\beta\gamma)^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \\ &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} - \frac{\sigma_3^2}{\alpha^2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)}\end{aligned}$$

که در آن

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

همین طور نقاط M, N وسطهای CA, AB عبارت‌اند از

$$M: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} - \frac{\sigma_3^2}{\beta^2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)} \quad N: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} - \frac{\sigma_3^2}{\gamma^2(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)}$$

فرض می‌کنیم K نقطه‌ای باشد که با $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$ نمایش داده شده است، بنابراین واضح است که

$$\overline{KL} = \overline{KM} = \overline{KN} = \frac{1}{|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|}$$

بنابراین K باید مرکز دایرهٔ نه نقطه باشد و شعاع آن $1/|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|$ است. لذا معادلهٔ دایرهٔ نه نقطه چنین خواهد شد

$$\left| z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right| = \frac{1}{|\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3|}$$

یعنی

$$\left(z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right) \left(\bar{z} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right) = \left(\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} \right)^2$$

که در آن از روابط

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{1}{\sigma_3}$$

استفاده شده است. از بسط رابطه اخیر خواهیم داشت

$$z\bar{z} - \left(\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3} + \frac{\sigma_2^2 \bar{z}}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3} \right) + \frac{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3} = 0$$

از حل دستگاه معادلات همزمان مشکل از معادله اخیر (معادله دایره نه نقطه) و معادله دایره محاطی داخلی $z\bar{z} = 1$ ، خواهیم داشت

$$\sigma_1^2 z^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 z + \sigma_2^2 = 0;$$

یعنی

$$(\sigma_1 z - \sigma_2)^2 = 0$$

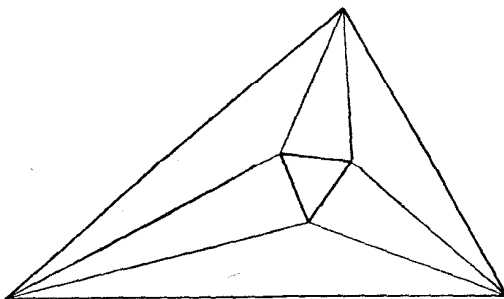
از اینجا نتیجه می شود که اگر $\sigma_1 \neq 0$ ، دستگاه معادله های این دو دایره، ریشه مضاعف خواهد داشت، که می رساند این دو دایره برهم مماس اند. اگر $\sigma_1 = 0$ ، مثلث مفروض متساوی الاضلاع (تمرین ۳۵.۱) و دایره های نه نقطه و محاطی داخلی برهم منطبق می شوند.

محاسبه بالا، بدون تغییر، معتبر است، حتی اگر دو تا از نقاط α, β, γ در امتداد اضلاع مربوطه قرار داشته باشند (یعنی دایره واحد، دایره محاطی خارجی باشد) بدین ترتیب برهان، کامل می شود. ■

۹.۲ قضیه مورلی

قضیه زیر را فرانک مورلی (۱۸۶۰-۱۹۳۴) در اوایل این سده کشف کرده و مطمئناً یکی از زیباترین قضایای ریاضی است.

قضیه ۱.۹.۲. (مورلی). نقاط تلاقی خطوط مجاور به هر ضلع از خطوطی که هر زاویه مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنند، رأسهای یک مثلث متساوی الاضلاع اند.



شکل ۲۱.۲

پیش از شروع به اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم:
 لم ۲.۹.۲. فرض کنید t_1, t_2, t_3 چهار نقطه بر دایره نه نقطه باشند. پس (امتداد) وترهای
 واصل بین نقاط t_1, t_2 و نیز t_2, t_3 در نقطه

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1 \bar{t}_2 - \bar{t}_3 \bar{t}_4}$$

یکدیگر را قطع می‌کنند.
 برهان. می‌دانیم معادلات خطوطی که از نقاط t_1 و t_2 و نیز از نقاط t_3 و t_4 می‌گذرند به ترتیب
 عبارت‌اند از:

$$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2, \quad z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4$$

پس فصل مشترک این دو خط نقطه زیر خواهد شد

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1 \bar{t}_2 - \bar{t}_3 \bar{t}_4}$$

برهان قضیه. بی‌آنکه خللی در کلیت وارد آید، می‌توان فرض کرد که $\triangle ABC$ در دایره واحد
 محاط شده و رأس A از آن در نقطه ۱ است. فرض می‌کنیم

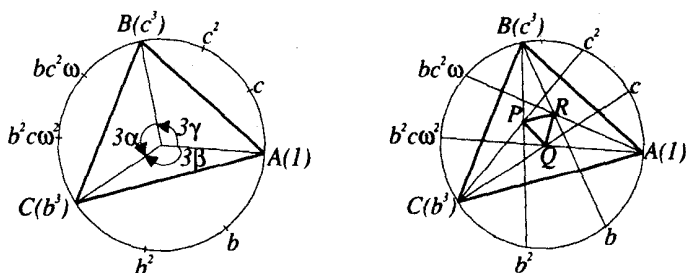
$$\begin{aligned} \angle AOB &= 3\gamma \quad \left(0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}\right), \\ \angle AOC &= 3\beta \quad \left(-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0\right), \\ \angle BOC &= 3\alpha \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0\right). \end{aligned}$$

پس شناسه‌هایی که کمان \widehat{BC} را (که حاوی نقطه A نیست) به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند
 عبارت‌اند از

$$\alpha + 3\gamma = \beta + 2\gamma + \frac{2\pi}{3}$$

و

$$2\alpha + 3\gamma = 2\beta + \gamma + \frac{4\pi}{3}$$



شکل ۲۲.۲

بنابراین اگر نقاطی که \widehat{AB} و \widehat{AC} را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند به ترتیب c^2 و نیز b^2 بگیریم، مقادیر نقاط C, B, A و c^2 و b^2 خواهند شد، و نقاطی که \widehat{BC} را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند با $bc^2\omega$ و $b^2c\omega^2$ (که در آن $\omega^3 + \omega + 1 = 0$) مشخص می‌شوند. فرض می‌کنیم $P(\lambda), Q(\mu), R(\nu)$ به ترتیب نقاط تلاقی ثلث‌سازهای زوایای B و C, C و A, A و B باشند. پس بنابر لم فوق

$$\lambda = \frac{b^{-2} + c^{-2} - b^{-2} - c^{-2}}{b^{-2}c^{-2} - b^{-2}c^{-2}} = \frac{bc^2 + b^2 - c^2 - b^2c}{b - c}$$

$$= \frac{(b - c)(b^2 + bc + c^2) - bc(b^2 - c^2)}{b - c} = (b^2 + bc + c^2) - bc(b + c)$$

$$\mu = \frac{1 + b^{-2}c^{-1}\omega^{-2} - b^{-2} - c^{-1}}{b^{-2}c^{-1}\omega^{-2} - b^{-2}c^{-1}} = \frac{b^2c + b\omega - c - b^2}{b\omega - 1}$$

$$= \frac{c(b^2 - 1) - b(b^2 - \omega)}{\omega(b - \omega^2)} = \omega^2 \{c(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2)\},$$

$$\nu = \frac{1 + b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1} - c^{-2}}{b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1}c^{-2}} = \frac{bc^2 + c\omega^2 - c^2 - b}{c\omega^2 - 1}$$

$$= \frac{b(c^2 - 1) - c(c^2 - \omega^2)}{\omega^2(c - \omega)} = \omega \{b(c^2 + c\omega + \omega^2) - c(c + \omega)\}.$$

$$\therefore \lambda + \omega\mu + \omega^2\nu = b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2$$

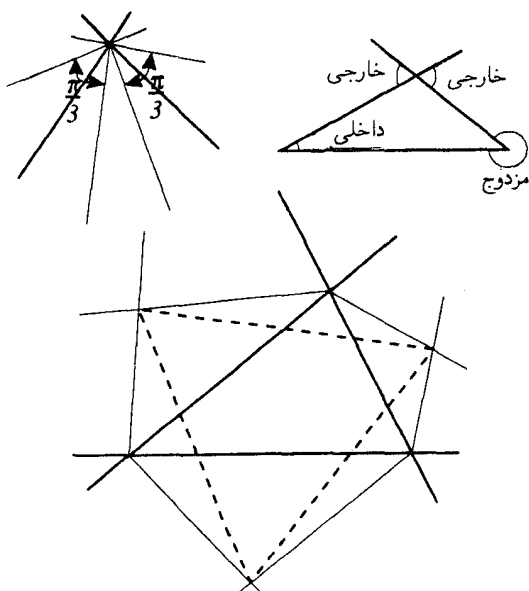
$$+ b^2c + bc\omega^2 + c\omega - b^2 - b\omega^2$$

$$+ bc^2 + bc\omega + b\omega^2 - c^2 - c\omega$$

$$= 0,$$

و بنابراین به آنچه که می‌خواستیم دست یافتیم.

به خوبی می‌دانیم که اگر به جای ثلث‌سازهای زوایای داخلی، ثلث‌سازهای زوایای خارجی گذاشته شوند، قضیه مورلی باز هم معتبر می‌ماند. چگونه می‌توان برهان قضیه را تغییر داد تا شامل این حالت شود؟ بدین منظور ابتدا ملاحظه می‌کنیم که ثلث‌سازهای داخلی و خارجی یک زاویه، با هم زاویه $\pi/3$ می‌سازند. چون زاویه مرکزی دو برابر زاویه محاطی است، نقطه P (که فصل مشترک



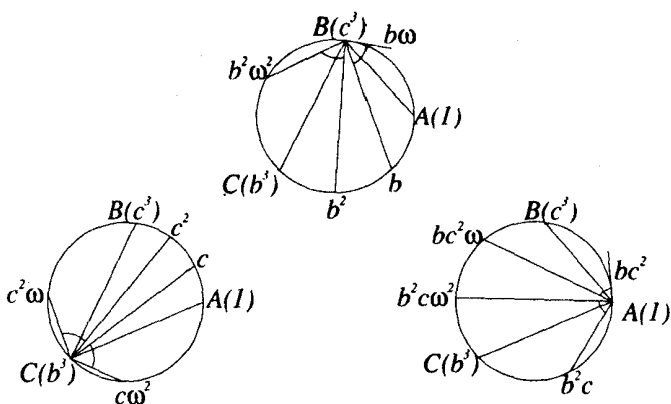
شکل ۲۳.۲

خطوط مارّ بر نقاط b^3 ، c^3 و c^2 ، b^2 است) فصل مشترک خطوط مارّ بر نقاط b^3 ، c^3 و c^2 ، b^2 می‌شود؛ نقطه Q (که فصل مشترک خطوط مارّ بر نقاط b^3 ، c^3 و c^2 ، b^2 است) فصل مشترک خطوط مارّ بر نقاط b^3 ، c^3 و c^2 ، b^2 می‌شود؛ در صورتی که نقطه R (که فصل مشترک خطوط مارّ بر نقاط b^3 ، c^3 و c^2 ، b^2 است) فصل مشترک خطوط مارّ بر زوج نقاط b^3 ، c^3 و bw و bc^2 خواهد شد.

اما این امر برابر است با گذاردن bw به جای b و cw^2 به جای c در برهان اولیه، و روشن است که با این تبدیل، محاسبه اولیه معتبر خواهد ماند! از این رو، حالت ثلث‌سازهای زوایای خارجی بدون زحمت اضافی ثابت می‌شود.

اما آیا تبدیلهای دیگری نیز وجود دارند؟ برای پی‌گیری این پرسش تبدیلهای:

$$T_b(b) = bw, \quad T_b(c) = c; \quad T_c(b) = b, \quad T_c(c) = cw;$$



شکل ۲۴.۲

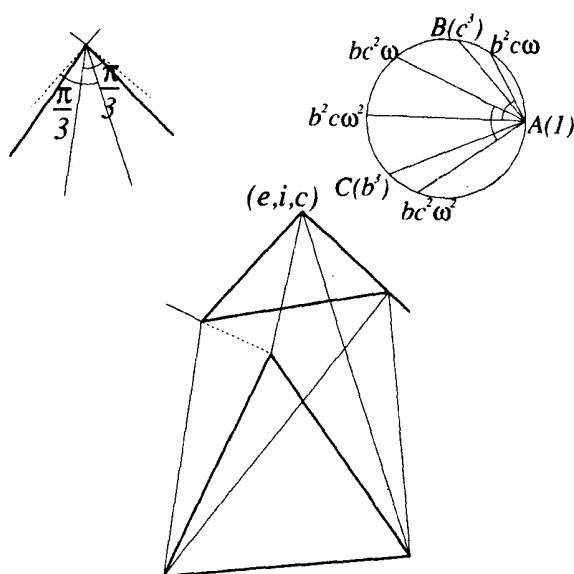
را وارد می‌کنیم. یعنی T_b را به $b\omega$ بدل می‌کند ولی c را بدون تغییر نگه می‌دارد. در صورتی‌که T_c را تغییر نمی‌دهد و c را به $c\omega$ بدل می‌کند. به عنوان مثال.

$$T_b T_c^\vee(b) = b\omega, \quad T_b T_c^\vee(c) = c\omega^\vee$$

از این رو در حالت ثلث‌سازهای زوایای خارجی، صرفاً با استفاده از تبدیل $T_b T_c^\vee (= T_c^\vee T_b)$ نتیجه حاصل می‌شود. ولی روشن است که برهان اولیه، تحت تبدیلهای دیگر مثلاً $T_b^\vee T_c (= T_c T_b^\vee)$ نیز معتبر است. معنی هندسی استفاده از تبدیل $T_b^\vee T_c$ ، یعنی گذاشتن $b\omega^\vee$ به جای b و $c\omega$ به جای c ، چیست؟ به آسانی دیده می‌شود که این عمل دقیقاً عمل تعویض همهٔ ثلث‌سازهای زاویه‌های داخلی با مزدوج آنهاست. از این رو قضیهٔ مورلی در این حالت نیز درست است.

چون $T_c^\vee =$ تبدیل همانی $= T_b^\vee$ ، حالت زیر حاصل می‌شود که در آن مثلاً (i, e, c) ، معرف گرفتن ثلث‌سازهای داخلی، خارجی و مزدوج رأسهای A, B, C به ترتیب است.

	I	T_b	T_b^\vee
I	(i, i, i)	(c, e, i)	(e, c, i)
T_c	(e, i, c)	(i, e, c)	(c, c, c)
T_c^\vee	(c, i, e)	(e, e, e)	(i, c, e)



شکل ۲۵.۲

در عمل می‌توان، کار دیگری کرد. در ۹ حالت بالا، هر یک از سه رأس مثلث را ثابت نگه داشته‌ایم، ولی آنچه را که نیاز داریم، ثابت نگاه نداشتن خود مثلث است. لذا تبدیل S را وارد می‌کنیم.

$$S(b) = c, \quad S(c) = b.$$

به عبارت دیگر، S نقشه‌های b و c را با هم عوض می‌کند. تبدیل S ممکن است هیچ اثری روی ثلث‌سازهای رأسهای B و C نداشته باشد (فقط نقشه‌ها را عوض می‌کند) ولی ثلث‌سازهای زاویه داخلی رأس A را با مزدوج ثلث‌سازهای زاویه در رأس A عوض می‌کند. چون S^2 تبدیل همانی است، دوباره ۹ حالت خواهیم داشت که در جدول زیر آمده است.

S	I	T_b	T_b^\vee
I	(c, i, i)	(i, i, c)	(e, i, e)
T_c	(e, e, i)	(c, e, c)	(i, e, e)
T_c^\vee	(i, c, i)	(e, c, c)	(c, c, e)

مثلاً

$$\begin{aligned} ST_b(b) &= c\omega, & ST_b(c) &= b; \\ ST_b^*T_c(b) &= c\omega^*, & ST_b^*T_c(c) &= b\omega, \end{aligned}$$

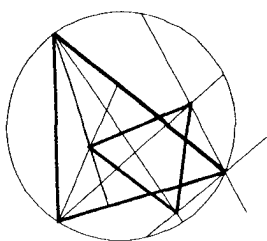
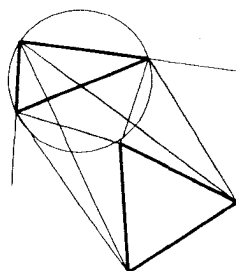
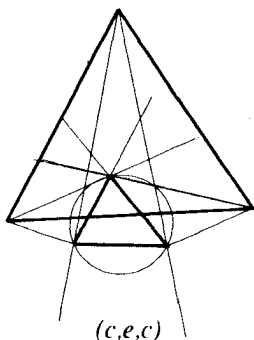
که به ترتیب به نوعهای (i, e, e) و (i, i, c) منجر می شود.
به طور خلاصه داریم:

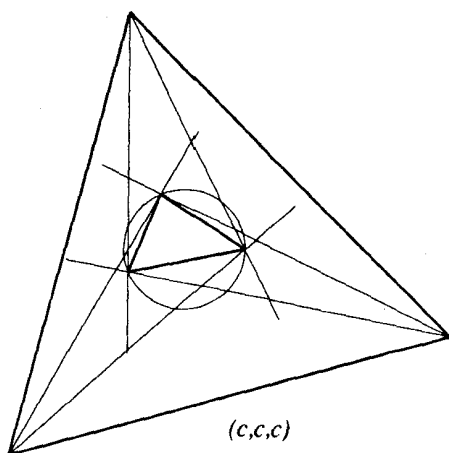
(۱) یک جایگشت برای هر یک از (i, i, i) ، (e, e, e) ، (c, c, c) ؛

(۲) شش جایگشت از (i, e, c) ؛

(۳) سه جایگشت برای هر یک از (i, e, e) ، (e, c, c) ، (c, i, i) ؛

پس کلاً ۱۸ مثلث متساوی الاضلاع داریم با ۷ نوع مختلف؛

 (c, i, i)  (e, i, e)  (c, e, c)



شکل ۲۷.۲

حالتی مانند (c, c, c) ، (i, c, c) ، (e, i, i) ، (c, e, e) که آورده نشده‌اند مثلثهای متساوی‌الاضلاع نمی‌دهند.

شایان ذکر است که برای رسم این ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع لازم است ۱۸ مثلث‌ساز زاویه رسم شود و هر یک از این ۱۸ مثلث‌ساز دقیقاً از ۳ رأس (از ۱۸ مثلث متساوی‌الاضلاع) می‌گذرد، و هر یک از این ۲۷ رأس دقیقاً دو بار مورد استفاده واقع شود.

تمرینها

۱. الف) بر هر یک از اضلاع یک چهارضلعی دلخواه و در خارج آن یک مربع رسم می‌کنیم. نشان دهید دو پاره خطی که مراکز دو مربع متقابل را به هم وصل می‌کنند بر یکدیگر عمودند و طولهای آنها برابرند.

ب) حالتی را که این مربعا در داخل چهارضلعی رسم می‌شوند مورد بحث قرار دهید. ج) چنانچه یکی از اضلاع چهارضلعی به یک نقطه بدل شود چه خواهد شد؟
۲. الف) بر هر یک از اضلاع یک متوازی‌الاضلاع دلخواه و در خارج آن یک مربع بنا می‌کنیم. نشان دهید که مراکز این مربعا خود رئوس یک مربع هستند.

ب) اگر این مربعا در داخل متوازی‌الاضلاع بنا شوند، چه پیش می‌آید؟

۳. الف) فرض می‌کنیم ثابتهای $a, b \in \mathbb{C}$ و $a \neq 0$ وجود دارند که در تساوی

$$w_k = az_k + b \quad (k = 1, 2, 3)$$

صدق می‌کنند. نشان دهید که $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$.

(ب) آیا عکس مطلب هم صحیح است؟

(ج) از لحاظ هندسی شرط مذکور را تعبیر کنید.

۴. الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای برقراری $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ وجود مقادیری مانند $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ است که همه همزمان صفر نیستند و

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0, \quad \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

(ب) اگر نسبت $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ برقرار باشد چه می‌شود؟

(ج) فرض می‌کنیم ۴ نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 در رابطه

$$z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0$$

صدق کنند. دربارهٔ چهارضلعی $z_1 z_2 z_3 z_4$ چه می‌توان گفت؟

۵. الف) (و. ه. اِکلز)^۱ فرض می‌کنیم ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مثلثهای متساوی‌الاضلاع همجهت باشند. نشان دهید که اوساط پاره‌خطهای AA', BB', CC' رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

(ب) چنانچه به جای وسطهای پاره‌خطهای قسمت (الف) نقاطی را که AA', BB', CC' را به نسبت عدد ثابتی مثل $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌نماید، بگذاریم چه خواهد شد؟

(ج) اگر به جای متساوی‌الاضلاع بودن، تشابه $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ را قرار دهیم چه پیش می‌آید؟

۶. الف) (و. ه. اِکلز) فرض می‌کنیم ΔABC و ΔDEF و ΔGHI متساوی‌الاضلاع و همجهت باشند. اگر P, Q, R را به ترتیب مرکزوارهای ΔADG و ΔBEH و ΔCFI بگیریم. نشان دهید ΔPQR متساوی‌الاضلاع است.

(ب) اگر به جای «متساوی‌الاضلاع» در (الف) «متشابه» قرار دهیم چه پیش می‌آید؟

(ج) اگر به جای مرکزوارهای مثلثها، نقاط با مختصات گرانگاهی این مثلثها را بگذاریم چه خواهد شد؟

۷. (ژ. پترسن - پ. ه. اسکوت) فرض می‌کنیم

$$\Delta AA_1 A_2 \sim \Delta BB_1 B_2 \sim \Delta CC_1 C_2 \quad \text{و} \quad \Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$$

نشان دهید:

$$\Delta A_2 B_2 C_2 \sim \Delta ABC$$

۸. فرض می‌کنیم A' و B' و C' نقاطی بر اضلاع BC ، CA ، AB از مثلث ABC باشند که این اضلاع را به نسبت ثابت m/n تقسیم کند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای برقراری

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

این است که یا $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع باشد (که در این صورت m/n دلخواه است) یا $m:n = 1:1$ (که در این صورت شکل $\triangle ABC$ دلخواه است).

۹. مثلث ABC مفروض است. بر اضلاع AB و AC به ترتیب مربعهای $ABDE$ و $ACFG$ را در خارج آن رسم می‌کنیم:

الف) M را وسط ضلع سوم BC می‌گیریم. نشان دهید که

$$\overline{EG} = 2\overline{AM} \quad \text{و} \quad EG \perp AM$$

ب) H را پای عمود وارد از رأس A بر ضلع BC می‌گیریم. نشان دهید که امتداد AH ، از وسط EG می‌گذرد.

۱۰. بر اضلاع AB و BC از متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$ و در خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع AEB و BFC ساخته شده‌اند. نشان دهید $\triangle DEF$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۱. بر هریک از دو ضلع مقابل یک چهارضلعی دلخواه و در خارج آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم، و بر هریک از دو ضلع مقابل دیگر این چهار ضلعی و در داخل آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌کشیم. نشان دهید چهار رأس جدید، رؤس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۱۲. الف) نشان دهید که در قضیه ناپلئون، اگر به جای «مثلثهای متساوی‌الاضلاع خارجی»، «مثلثهای متساوی‌الاضلاع داخلی» بگذاریم باز هم قضیه متغیر است.

ب) نشان دهید که مرکزوارهای داخلی و خارجی مثلثهای ناپلئون یکی هستند.

۱۳. الف) بر اضلاع یک مثلث دلخواه، مثلثهای متساوی‌الاضلاع طوری بسازید که دو تای آنها خارجی باشند و دیگری داخلی باشد. نشان دهید که مرکزوار مثلث داخلی با دو مرکزوار مثلثهای خارجی یک مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه $2\pi/3$ تشکیل می‌دهند.

ب) نشان دهید که اگر نقش داخلی و خارجی را در الف) با هم عوض نمائیم، نتیجه همچنان معتبر خواهد ماند.

۱۴. الف) بر اضلاع یک مثلث دلخواه ABC و در خارج آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع LBC و MCA و NAB را بنا می‌کنیم. نشان دهید که LA و MB و NC ، یک طول دارند، در یک نقطه متقاربانند و زاویه بین آنها در این نقطه تلاقی برابر $2\pi/3$ است.

ب) اگر مثلثهای متساوی‌الاضلاع داخلی باشند چه می‌شود؟

۱۵. الف) مثالی رسم کنید که سه نقطه مفروض، مرکز مربعی باشد که بر روی اضلاع آن و در خارج آن ساخته می‌شوند.

ب) مثالی رسم کنید که سه نقطه مفروض رأسهای سوم مثلثهای متساوی‌الاضلاعهایی باشند که بر اضلاع آن و در خارج آن ساخته می‌شوند.

۱۶. الف) بر اضلاع $\triangle A_1A_2A_3$ مثلثهای متشابه: $P_1A_2A_3$ و $A_2P_2A_1$ و $A_3P_3A_1$ را می‌سازیم و فرض می‌کنیم G_1 و G_2 و G_3 مرکزهای آن مثلثهای متشابه باشند. نشان دهید $\triangle G_1G_2G_3$ چهارمین مثلث متشابه را تشکیل می‌دهد. این قضیه تعمیم قضیه ناپلئون است. درواقع با قرار دادن «نقاط با مختصات گرانگاهی در مثلثهای مشابه مربوط» به جای «مرکزوارها»، (توجه کنید که از ترتیبی که رأسهای مثلثهای مشابه را نام گذاریم، رأسهای P_1 و P_2 و P_3 ، رأسهای متناظر این مثلثهای متشابه نیستند) می‌توان قضیه را بیشتر تعمیم داد.

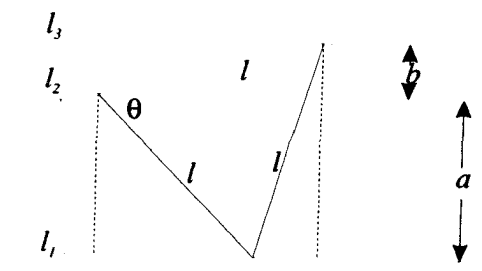
ب) فرض کنید $\triangle Q_1A_2A_3$ و $\triangle A_2Q_2A_1$ و $\triangle A_3Q_3A_1$ قرینه‌های سه مثلث متشابه در (الف) به ترتیب نسبت به A_2A_3 ، A_3A_1 و A_1A_2 و G'_1 و G'_2 و G'_3 مرکزهای این مثلثهای متشابه باشند. نشان دهید که فقط و فقط هنگامی مرکزوارهای $\triangle G_1G_2G_3$ و $\triangle G'_1G'_2G'_3$ بر هم منطبق‌اند که $\triangle P_1A_2A_3$ و $\triangle Q_1A_2A_3$ و غیره مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند.

۱۷. در صفحه xoy یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی را در $(0, a)$ ثابت نگه‌میداریم و رأس دیگر (x, y) آن را در طول محور x حرکت می‌دهیم. نشان دهید که مکان هندسی رأس سوم (x, y) دو خط مستقیم به معادلات $y + a = \pm\sqrt{3}x$ هستند.

۱۸. دو خط ℓ و m و نقطه A که بر هیچ یک از این دو خط واقع نیست مفروض‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بسازید به طوری که رأس B بر خط ℓ واقع باشد و رأس C بر خط m . مسأله چند جواب دارد؟

۱۹. یکی از دو راه حل زیرین در مورد مثال انتهای بخش ۱۰.۲ غلط است. این راه حل کدام است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف) راه حل مثلثاتی: قراردادهای شکل ۲۸.۲ را وارد می‌کنیم. پس



شکل ۲۸.۲

$$a = \ell \sin \theta,$$

$$b = \ell \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) = \ell \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \ell \cos \theta - \frac{a}{2}.$$

$$\therefore \ell \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)$$

$$\therefore \ell^2 = a^2 + \frac{1}{3}(a + 2b)^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

ب) راه حل ماهرانه. فرض می‌کنیم $f(a, b)$ مساحت مطلوب باشد. رعایت ابعاد، به ما اجازه

می‌دهد بنویسیم:

$$f(a, b) = pa^2 + qab + rb^2$$

که در آن p و q و r ضرایبی هستند که باید تعیین شوند. اگر ℓ_2 و ℓ_3 بر هم منطبق باشند، آنگاه $b = 0$ و داریم:

$$f(a, 0) = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \quad \therefore p = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

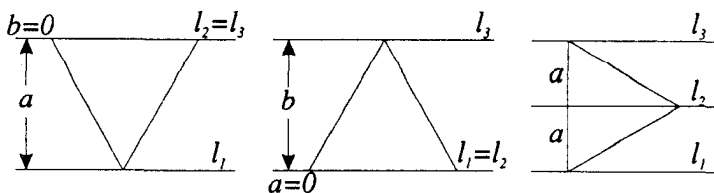
و به موجب تقارن، داریم $r = p = \frac{1}{\sqrt{3}}$

اگر $a = b$ ، آنگاه

$$f(a, a) = \sqrt{3}a^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + q \right) a^2 \quad \therefore q = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

بنابراین

$$f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a^2 + ab + b^2).$$



شکل ۲۹.۲

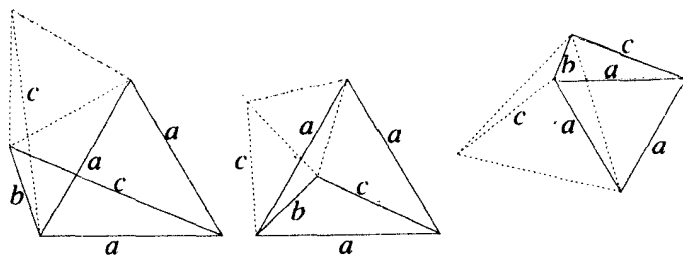
۲۰. الف) سه دایره متحدالمرکز مفروض اند. مثلث متساوی الاضلاعی بسازید که هر رأس آن بر یکی از این سه دایره واقع باشد. مسأله چند جواب دارد؟

ب) مساحت این مثلثهای متساوی الاضلاع را برحسب شعاعهای این دواير متحدالمرکز پیدا کنید.

راهنمایی: فرض کنید $|z| = a$, $|z| = b$, $|z| = c$ این سه دایره متحدالمرکز باشند. یک رأس را در $z = a$ ثابت بگیرید، رأس دیگر را $z = be^{i\theta}$ فرض کنید. پس رأس سوم z «باید» در معادله

$$z = -\omega(aw + be^{i\theta}) \quad \text{یعنی} \quad z + be^{i\theta}\omega + a\omega^2 = 0$$

صدق کند. اگر $|z| = c$ خواهیم داشت $a^2 - 2ab\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + b^2 = c^2$. معنی این تساوی این است که اگر مثلثی با سه ضلع a , b , و c بسازیم، زاویه مقابل به ضلع با طول c برابر $\theta + \frac{\pi}{3}$ خواهد بود. این نکته ما را به ترسیم زیر راهنمایی می کند (خواننده باید جزئیات کار را انجام دهد و درباره امکان ترسیم بحث کند).



شکل ۳۰.۲

۲۱. از قضیه بطلمیوس ۱.۲.۲ با محاط کردن یک ذوزنقه در یک دایره، قانون کسینوسها را استخراج کنید.

۲۲. الف) فرض می کنیم $\triangle ABC$ مثلثی متساوی الاضلاع باشد. به ازای هر نقطه P واقع بر دایره محیطی این مثلث، نشان دهید که طول بزرگترین پاره خط از پاره خطهای PA , PB , PC ، برابر است با مجموع طولهای دوباره خط دیگر.

ب) فرض می کنیم نقطه P بر \widehat{AD} از دایره محیطی مربع $ABCD$ باشد. نشان دهید

$$\overline{PB}(\overline{PB} + \overline{PD}) = \overline{PC}(\overline{PA} + \overline{PC})$$

ج) $ABCDE$ را یک پنج ضلعی منتظم می گیریم. به ازای نقطه دلخواه P واقع بر دایره

محیطی آن، نشان دهید که از میان پاره‌خطهای PA, PB, PC, PD, PE مجموع طولهای بزرگترین و دو پاره خط کوچکترین با مجموع دو طول باقیمانده برابر است.

۲۳. چهار نقطه A و B و C و D بر دایره‌ای مفروض‌اند. نشان دهید که پاهای عمودهای مرسوم از A و B بر خط CD و پاهای عمودهای مرسوم از C و D بر خط AB همدایره‌اند.

۲۴. به ازای هر $a \neq 0$ ، نشان دهید که نقاط: a و $-a$ و $\frac{1}{a}$ و $-\frac{1}{a}$ و 1 و -1 همدایره‌اند.

۲۵. الف) چهار نقطه A و B و C و D داده شده‌اند. A' و B' و C' و D' را به ترتیب مرکزوارهای مثلثهای BCD و ACD و ABD و ABC می‌گیریم. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه A' و B' و C' و D' همدایره باشند، این است که A و B و C و D همدایره باشند.

ب) اگر به جای «مرکزواردا»، «مراکز ارتفاعات» را بگذاریم چه خواهد شد؟ «مراکز دایره‌های نه نقطه» را چطور؟

۲۶. الف) مثلث $\triangle ABC$ و نقاط P و Q و R به ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB (بر امتداد آنها) مفروض‌اند. نشان دهید که دوایر محیطی $\triangle AQR$ و $\triangle BRP$ و $\triangle CPQ$ در یک نقطه متلاق‌اند.

ب) چهار ضلعی $ABCD$ و نقاط P و Q و R و S به ترتیب بر اضلاع AB و BC و CD و DA (بر امتداد آنها) داده شده‌اند، به طوری که این چهار نقطه همدایره‌اند. نشان دهید که چهار نقطه تلاقی جدید دوایر محیطی مجاور $\triangle APS$ و $\triangle BQP$ و $\triangle CRQ$ و $\triangle DSR$ همدایره‌اند.

۲۷. الف) مثالی برای چهار دایره‌ای بیاورید که هر سه‌تای آنها متقارب باشند ولی هر چهارتای آنها متقارب نباشند.

ب) نشان دهید که اگر هر سه دایره از پنج دایره متقارب باشند، همه این پنج دایره متقارب‌اند.

۲۸. D را نقطه‌ای دلخواه بر دایره محیطی $\triangle ABC$ و A' و B' و C' را محل تلاقی عمودهای وارد از D به ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB با دایره محیطی بگیرید. نشان دهید AA' و BB' و CC' با خط سیمسن نقطه D نسبت به $\triangle ABC$ موازی‌اند.

۲۹. تحقیق کنید که معادله خط سیمسن خود - مزدوج است.

۳۰. (ی. اشتاینر) ثابت کنید که خط سیمسن یک نقطه واقع بر دایره محیطی $\triangle ABC$ ، پاره خطی را که این نقطه را به مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ وصل می‌کند، نصف می‌کند. همچنین ثابت کنید که این نقطه تلاقی بر دایره نه نقطه $\triangle ABC$ قرار دارد.

۳۱. فرض می‌کنیم D نقطه‌ای دلخواه بر دایره محیطی $\triangle ABC$ ، و P و Q و R پاهای عمودهای مرسوم از D به ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB باشند. نشان دهید:

$$\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{CA}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{\overline{BQ}} = \text{قطر دایره محیطی مثلث}$$

۳۲. یک چهار ضلعی محاط در دایره‌ای داده شده است. نشان دهید که چهار خط سیمسن یک

رأس نسبت به مثلثی که از سه رأس دیگر تشکیل می‌شود، متقارب‌اند و نقطه تقارب مرکز دایره نه نقطه این چهار ضلعی است.

۳۳. نشان دهید که خطوط سیمسن هر دو نقطه متقاطع واقع بر دایره محیطی $\triangle ABC$ بر یکدیگر عمودند و نقطه تلاقی آنها بر دایره نه نقطه $\triangle ABC$ واقع است.

۳۴. فرض کنید D نقطه‌ای بر دایره محیطی $\triangle ABC$ باشد، و EF وترى عمود بر خط سیمسن D نسبت به $\triangle ABC$ باشد. نشان دهید خطوط سیمسن نقاط D و E و F نسبت به $\triangle ABC$ متقارب‌اند.

۳۵. $\triangle ABC$ و نقطه D داده شده‌اند. فرض می‌کنیم L و M و N به ترتیب قرینه‌های نقطه D نسبت به اضلاع BC و CA و AB باشند. نشان دهید شرط لازم و کافی برای این که نقاط L و M و N همخط باشند، این است که D بر دایره محیطی $\triangle ABC$ واقع باشد. در این حالت خطی که از نقاط L و M و N می‌گذرد از نقطه H مرکز ارتفاعات $\triangle ABC$ نیز می‌گذرد و با خط سیمسن D نسبت به $\triangle ABC$ موازی است.

راهنمایی: $\triangle DBC \sim \triangle LBC$ (درجهت عکس).

۳۶. (م. ب. کانتور) n نقطه بر یک دایره داده شده‌اند. از مرکزوارهای $n - 2$ تا از این n نقطه، عمودهایی بر خطوط واصل بین دو نقطه باقیمانده رسم می‌کنیم. نشان دهید که این $\binom{n}{2}$ عمود متقارب‌اند.

۳۷. $\triangle ABC$ با $\angle ABC = \frac{1}{2}\pi$ داده شده است. A' و B' و C' را فصل مشترکهای نیمسازهای رئوس A و B و C با اضلاع مقابل می‌گیریم. نشان دهید $\angle A'B'C' = \frac{\pi}{4}$.

۳۸. R و r را به ترتیب شعاعهای دواير محیطی و محاطی داخلی $\triangle ABC$ می‌گیریم. اگر d فاصله بین مراکز این دو دایره باشد، نشان دهید:

$$d^2 = R(R - 2r)$$

در نتیجه، $R \geq 2r$.

۳۹. کوچکترین گروهی را بیابید که شامل تبدیلهای T_b و T_c و S در برهان قضیه مورلی ۱.۹.۲ باشد. این گروه چند عضو دارد؟

۴۰. الف) (ب. پاسکال) فرض می‌کنیم A و B و C و D و E و F شش نقطه بر یک دایره‌اند، و P و Q و R به ترتیب فصل مشترکهای (امتدادهای) «اضلاع متقابل» AB و DE و BC و EF و CD باشند. نشان دهید که نقاط P و Q و R همخط‌اند. این خط را خط پاسکال شش نقطه A و B و C و D و E و F گویند.

ب) چون حرف‌گذاری شش نقطه را می‌توان با هر ترتیبی انجام داد، با تغییر حرف‌گذاری، خط پاسکال متفاوتی (هر بار برای یک شش نقطه) به دست می‌آید. چند تا خط پاسکال برای این شش نقطه واقع بر یک دایره می‌توانند وجود داشته باشند؟

۴۱. الف) $\triangle ABC$ مثلثی دلخواه و P و Q و R فصل مشترکهای خطوط مماس بر دایره محیطی در رئوس با امتدادهای اضلاع متقابل مربوطه هستند. نشان دهید نقاط P و Q و R همخطاند.

ب) گیریم $ABCD$ یک چهارضلعی محاط در دایره و P و Q به ترتیب فصل مشترکهای (امتدادهای) AB و CD ، AC و BD باشند، و فرض می‌کنیم R و S به ترتیب فصل مشترکهای خطوط مماس بر دایره محیطی در A و D و نیز در B و C باشند. نشان دهید که نقاط P و Q و R و S همخطاند.

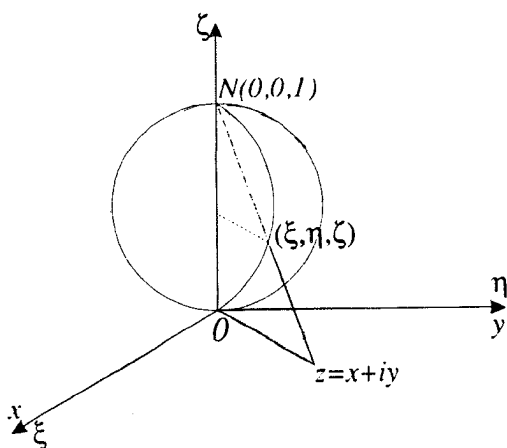
ج) نقطه‌ای بر یک دایره داده شده است. فقط با استفاده از ستاره، مماسی در این نقطه بر دایره رسم کنید.

تبدیل‌های موبیوس

۱.۳ تصویر گنج‌گاشتی

تاکنون اعداد مختلط را با نقاط یک صفحه نمایش داده‌ایم. ولی اغلب نیاز داریم که آنها را به صورت نقاط واقع بر یک کره هم در نظر بگیریم.

کره‌ای به قطر واحد، مماس بر صفحه مختلط در مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. معادله این کره در دستگاه مختصات متعامد (ξ, η, ζ)



شکل ۱.۳

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

خواهد بود. به ازای هر نقطه $z = x + iy$ در صفحه مختلط، پاره خطی که قطب شمال $(0, 0, 1)$ را به این نقطه وصل می کند، کره را در نقطه یکتایی (غیر از قطب شمال) قطع می کند. به عکس به ازای هر نقطه واقع بر کره، غیر از قطب شمال، امتداد پاره خط واصل بین این نقطه و قطب شمال، صفحه مختلط را در نقطه یکتایی می برد. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک بین صفحه مختلط و کره ریمان که قطب شمال آن حذف شده است، به وجود می آید. برای برداشتن این استثنا، یک نقطه آرمانی به نام نقطه بینهایت را (که با ∞ نشان داده می شود)، متناظر با قطب شمال N ، به صفحه مختلط \mathbb{C} اضافه می کنیم. این صفحه مختلط توسعه یافته را با $\hat{\mathbb{C}}$ نمایش می دهیم؛ بنابراین $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

فرض می کنیم $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ، متناظر با نقطه (ξ, η, ζ) از کره ریمان باشد، پس با در نظر گرفتن مثلثهای متشابه داریم:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1 - \zeta} \quad \therefore x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

یعنی:

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}, \quad x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$$

به عکس اگر ξ, η, ζ را بر حسب x و y و z پیدا کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{1 + |z|^2} = \frac{z + \bar{z}}{2(1 + |z|^2)} \\ \eta &= \frac{y}{1 + |z|^2} = \frac{z - \bar{z}}{2i(1 + |z|^2)} \\ \zeta &= \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{aligned}$$

برای یافتن نگاره یک دایره (یا یک خط) از صفحه بر کره ریمان، این روابط را در معادله یک دایره (یک خط اگر $A = 0$) از صفحه، یعنی:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

قرار می‌دهیم (که در آن $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ و $B^2 + C^2 \geq 4AD$)، تا معادله خطی زیر به دست آید

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1 - \zeta) = 0.$$

باید توجه داشت که شرط تقاطع این صفحه با کره ریمان، برقراری رابطه:

$$\left| \frac{\frac{1}{4}(A - D) + D}{\sqrt{B^2 + C^2 + (A - D)^2}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

است که دقیقاً همان شرط $B^2 + C^2 \leq 4AD$ و مبین آن است که معادله اصلی در صفحه مختلط، واقعاً معادله یک دایره است. به علاوه اگر $A = 0$ ، قطب شمال $(0, 0, 1)$ در معادله یک صفحه صدق می‌کند. چون فصل مشترک یک صفحه با کره یک دایره است، نیمه اول قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه ۱.۱.۳. دایره و خطوط واقع در صفحه، بر دایره کره نگاشته می‌شوند. خطوط مستقیم، بر دایره مارّ بر قطب شمال نگاشته می‌شوند. به عکس دایره کره بر دایره و خطوط صفحه نگاشته می‌شوند.

برهان. برای اثبات عکس قضیه، ملاحظه می‌کنیم که یک دایره واقع بر کره، فصل مشترک این کره با صفحه‌ای است مانند:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0.$$

و برای حصول اطمینان از تقاطع کره و صفحه باید شرط:

$$A^2 + B^2 \geq 4D(C + D) \quad \text{یعنی} \quad \left| \frac{\frac{1}{4}C + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

برقرار باشد. این معادله برحسب x و y به صورت

$$(C + D)(x^2 + y^2) + Ax + By + D = 0$$

در می‌آید. اگر $C + D \neq 0$ ، این معادله معرف یک دایره است؛ و چنانچه $C + D = 0$ ، (یعنی هنگامی که دایره واقع بر کره از قطب شمال بگذرد)، این معادله معرف یک خط مستقیم است. ■

به‌ویژه این مطلب می‌رساند که هر دو خط واقع در صفحه یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت قطع می‌کنند. یک ویژگی مهم دیگر تصویر گنجنگاشتی، ویژگی زیر است:

قضیه ۲.۱.۳. تصویر گنجنگاشتی حافظ زاویه است.

برهان. بی‌آنکه از کلیت مسأله کاسته شود، می‌توانیم دو منحنی متقاطع در صفحه را دو خط مستقیم بگیریم. اما دو خط مستقیم در صفحه که در نقطه (x_0, y_0) متقاطع باشند، بر دو دایره از کرهٔ ربمان نگاشته می‌شوند که در نقطه (ξ_0, η_0, ζ_0) و قطب شمال یکدیگر را قطع می‌کنند و این دو دایره در نقاط تقاطع، زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ دو خط می‌سازند. اگر دو خط واقع در صفحه، خطوط:

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{و} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

باشند، نگاره‌های گنجنگاشتی آنها به‌ترتیب در صفحات

$$A_2\xi + B_2\eta + C_2(1 - \zeta) = 0 \quad \text{و} \quad A_1\xi + B_1\eta + C_1(1 - \zeta) = 0$$

قرار خواهند داشت. مماسهای مرسوم بر دایره متناظر در قطب شمال، فصل مشترکهای این صفحات با صفحه $\zeta = 1$ خواهند بود، که معادله‌های آنها به‌ترتیب:

$$\begin{cases} A_2\xi + B_2\eta + C_2(1 - \zeta) = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} A_1\xi + B_1\eta + C_1(1 - \zeta) = 0 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

خواهند شد واضح است که زاویهٔ بین دو خط در صفحهٔ مختلط، درست همان زاویهٔ بین دو خط مماس در قطب شمال بر دو دایرهٔ متناظر است (زیرا صفحه $\zeta = 1$ با صفحهٔ مختلط موازی است). ■

باید توجه داشت، که اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید ثابت کنیم که در تصویر گنجنگاشتی ویژگی دارا بودن یک مماس محفوظ می‌ماند. اما این کار مستلزم استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

۲.۳ تبدیل‌های موبیوس

اکنون به توابع مقدماتی ولی مفید معروف به تبدیل‌های موبیوس (تبدیل‌های خطی کسری، تبدیل‌های دوخطی، تبدیل‌های همساز و غیره) می‌پردازیم. ولی ابتدا به یک نکته توجه می‌کنیم.

برای مطالعهٔ رفتار یک تابع حقیقی - مقدار از یک متغیر حقیقی، صفحهٔ (x, y) را، برای رسم نمودار آن به کار می‌بریم (x به‌عنوان متغیر و y به‌عنوان تابع) - این کار بیش و شهود ما را افزایش می‌دهد، ولی در مورد توابع مختلط - مقدار از یک متغیر مختلط این کار میسر نیست - در اینجا به فضای چهار بعدی نیاز داریم (دو بعد برای متغیر z و دو بعد برای تابع w)، که فراسوی جهان

مادی ماست. پس برای مطالعه تابع مختلط - مقدار از دو صفحه مختلط استفاده می‌کنیم، صفحه z برای متغیر z و صفحه w برای تابع w . این روش به اندازه حالت توابع حقیقی - مقدار از یک متغیر حقیقی، کمال مطلوب نیست ولی این بهترین کاری است که می‌توانیم انجام دهیم. تبدیلهای موبیوس با توابع گویای خاصی به صورت

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

تعریف می‌شوند. شرط $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ، شرط حصول اطمینان از ثابت نبودن تابع T است. تبدیلهای موبیوس در همه جای صفحه مختلط بجز در نقطه $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ تعریف شده‌اند، و تبدیل عکس آن

$$z = T^{-1}w = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

(با توجه به $\begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$) نیز یک تبدیل موبیوس است و نشان می‌دهد که در همه جای صفحه w بجز نقطه $w = \frac{\alpha}{\gamma}$ ، یک پیشنگاره (یکتا) دارد. بهتر است این استثناها را با در نظر گرفتن تبدیلهای موبیوس به عنوان نگاشتی از کره ریمانی بر روی خودش، و این تعریف که نگاره $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ همان $w = \infty$ ، و پیشنگاره $w = \frac{\alpha}{\gamma}$ همان $z = \infty$ است، از میان برداریم. با توجه به اینکه عکس تبدیل موبیوس یک تبدیل تکمقداری است، این بسط تعریف تبدیلهای موبیوس، به ما امکان می‌دهد که تبدیلهای موبیوس را نگاشتهایی دوسویی (یک به یک و پوشا)، از صفحه مختلط توسیع یافته $\hat{\mathbb{C}}$ بر روی خودش تلقی کنیم.

روشن است که نگاشت همانی یک تبدیل موبیوس است ($\alpha = \delta, \beta = \gamma = 0$). علاوه بر این، ترکیب تبدیلهای موبیوس، یک تبدیل موبیوس است، یعنی اگر صفحه z را بر روی صفحه w_1 با ضابطه

$$w_1 = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

و صفحه w_1 را بر روی صفحه w با ضابطه

$$w = Sw_1 = \frac{aw_1 + b}{cw_1 + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

بنگاریم، نتیجه آن یک تبدیل موبیوس از صفحه z بر روی صفحه w می‌شود که با رابطه زیر داده می‌شود

$$w = STz = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

با شرط

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

به طریقی مشابه می‌توان شرکتپذیری را تحقیق نمود و بنابراین قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. مجموعه \mathcal{M} مرکب از همه تبدیلهای موبیوس، یک گروه تشکیل می‌دهد؛ یعنی چهار اصل موضوع زیر در آن صدق می‌کند:

(الف). به‌ازای هر دو تبدیل $T, S \in \mathcal{M}$ ، حاصلضرب (ترکیب) آنها TS ، معین و عنصری از \mathcal{M} است. یعنی $TS \in \mathcal{M}$.

(ب). \mathcal{M} دارای عنصری مانند I به‌نام عنصر همانی است با این ویژگی که: به‌ازای هر $T \in \mathcal{M}$ ، $TI = IT = T$.

(ج). به هر عنصر $T \in \mathcal{M}$ عنصری مانند $T^{-1} \in \mathcal{M}$ ، به‌نام عکس T ، متناظر است، که ویژگی زیر را دارد

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

(د). قانون شرکتپذیری در \mathcal{M} برقرار است: به‌ازای همه تبدیلهای $T, S, U \in \mathcal{M}$ ،
 $(TS)U = T(SU)$

عبارتی که برای حاصلضرب تبدیلهای موبیوس به‌دست آوردیم، ماتریسها را در ذهن ما تداعی می‌کند. اگر تبدیلهای موبیوس S, T در فوق را به ترتیب با

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نمایش دهیم، آنگاه:

$$ST = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

یعنی این نماد با عمل ضرب ماتریسها تطابق دارد، یا بهتر بگوییم گروه همه ماتریسهای وارونپذیر 2×2 با گروه همه تبدیلیهای موبیوس همریخت است. زیرمجموعه‌ای از یک گروه را هنگامی زیرگروه گویند که خودش (با همان عمل گروهی) تشکیل گروه دهد. در اینجا مثالهایی از زیرگروه موبیوس M می‌آوریم.

مثال ۱. مجموعه همه انتقالها:

$$w = Tz = z + b \quad (b \in \mathbb{C} \text{ به‌ازای مقدار ثابتی مانند } b)$$

مثال ۲. مجموعه همه اتساعها:

$$w = Tz = \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{C} \text{ به‌ازای مقدار ثابت ناصفر } \alpha)$$

درواقع این زیرگروه شامل دو زیرگروه مهم است.

الف) بزرگنماییها:

$$w = Tz = az \quad (a \text{ مقدار ثابت مثبت است})$$

این، همان بزرگ (کوچک) کردن به نسبت a است.

ب) دورانها:

$$w = Tz = kz \quad (|k| = 1 \text{ که در آن:})$$

این همان دوران حول مبدأ با شناسه k است. باید توجه کرد که بزرگنماییها و دورانها جابه‌جایی هستند و هر اتساع، حاصلضرب یک بزرگنمایی در یک دوران است.

مثال ۳. زیرمجموعه M متشکل از عنصر همانی و عکس آن:

$$w = Tz = \frac{1}{z}$$

(به‌تنهایی) نیز یک زیرگروه است.

اکنون تابع گویای معرّف تبدیل موبیوس، یعنی:

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم. دو امکان وجود دارد:
الف) اگر $\gamma = 0$ ، آنگاه $\delta \neq 0$ و داریم

$$w = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$$

ب) اگر $\gamma \neq 0$ ، آنگاه:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma}{\gamma z + \delta}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یک تبدیل موبیوس حاصلضرب اتّساعها، انتقالها و یک عکس کردن است. روشن است که انتقال و اتّساع، خطوط را به خطوط، و دایر را به دایر می‌نگارند. این امر در مورد عمل عکس درست نیست. ولی خانواده همه خطوط مستقیم و دایر در عمل عکس پایا می‌مانند. فرض کنید.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (B^2 + C^2 > 4AD)$$

و یا به صورت دیگر معادله:

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \quad (|b|^2 > ac)$$

که $a = A$ و $c = D$ اعداد حقیقی و $b = \frac{1}{2}(B + iC)$ عددی مختلط، معادله یک دایره (یک خط، اگر $a = 0$) در صفحه است. با انجام عمل عکس $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$a + \bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0$$

که معادله‌ای از همان نوع است و قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲.۳. تبدیلهای موبیوس، خانواده همه دایر و خطوط مستقیم صفحه را بر خودشان می‌نگارند.

همان‌گونه که در فصل ۲ گفتیم، خطوط مستقیم حالات خاص دایر در نظر گرفته می‌شوند.

۳.۳ نسبتهای ناهمساز

هر تبدیل موبیوس را نسبتهای بین ضرایبش کاملاً مشخص می‌کند، لذا با داشتن سه شرط باید بتوانیم یک تبدیل موبیوس را که در این شرایط صدق می‌کند تعیین کنیم. به خصوص، از آنجا که هر

دایره با سه نقطه مشخص می‌شود، پس باید بتوانیم تبدیل موبیوسی پیدا کنیم که یک دایره مفروض از صفحه z را بر دایره مفروضی از صفحه w بنگارد. مطلب را با مشاهده زیر آغاز می‌کنیم. فرض کنید:

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

اگر w را برحسب z حساب کنیم، تبدیل موبیوس w برحسب z به دست می‌آید. به علاوه، اگر صورت یکی از دو طرف صفر شود، صورت طرف دیگر نیز باید صفر شود و مخرجها متناظراً به هم مربوط باشند. بدین ترتیب اگر یک تبدیل موبیوس z_1, z_2, z_3 را به ترتیب بر w_1, w_2, w_3 بنگارد، آنگاه می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} = k \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

که باید ثابت k تعیین شود. بدون در نظر گرفتن مقدار k ، تبدیل موبیوسی که با این معادله مشخص می‌شود z_2 و z_3 را به ترتیب بر w_2 و w_3 می‌نگارد. بنابراین کافی است k را چنان انتخاب کنیم که z_1 با w_1 متناظر شود. یعنی

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = k \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

از اینجا k را به دست آورده آن را در رابطه قبلی می‌گذاریم (یا از تقسیم این دو تساوی بر هم و حذف k) خواهیم داشت

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} \bigg/ \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

این تبدیل موبیوسی است که z_1, z_2, z_3 را به ترتیب بر w_1, w_2, w_3 می‌نگارد. اما اگر این تبدیل موبیوس z را نیز بر w بنگارد، باید داشته باشیم

$$\frac{w_0 - w_2}{w_0 - w_3} \bigg/ \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

یعنی:

$$(w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم:

قضیه ۱.۳.۳. نسبت ناهمساز بر اثر تبدیلهای موبیوس ناوردا می ماند.

فرع ۲.۳.۳. شرط لازم و کافی برای این که تبدیل موبیوسی وجود داشته باشد که z_0, z_1, z_2, z_3 را به ترتیب بر w_0, w_1, w_2, w_3 بنگارد، این است که تساوی زیر برقرار باشد:

$$(w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$$

برای اینکه صحت این قضیه را با کلیت تمام بیان کنیم تعریف نسبت ناهمساز را برای حالتی که یکی از نقاط ∞ باشد تعمیم می دهیم، بدین صورت که اصلاً عواملی را که شامل این نقطه هستند حذف می کنیم. مثلاً اگر $z_0 = \infty$ خواهیم داشت:

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}$$

زیرا با توجه به روابط:

$$\begin{aligned} (z_0, z_1; z_2, z_3) &= \frac{z - z_2}{z - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{z_1}{z}}{1 - \frac{z_3}{z}} \right) \cdot \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) \\ &\rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \quad (z \rightarrow \infty \text{ وقتی}) \end{aligned}$$

این نسبت به طور خیلی طبیعی به دست می آید.

از اینجا نتیجه می شود که همواره می توان تبدیل موبیوسی را که سه نقطه مفروض $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ را به سه نقطه متمایز از پیش تعیین شده $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ می برد با نوشتن:

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} \bigg/ \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

و حل این معادله نسبت به w به دست آورد. چون تناظر $z_j \rightarrow w_j$ ($j = 1, 2, 3$) این تبدیل موبیوس را کاملاً معین می کند، تبدیل موبیوس مطلوب به دست می آید.

چون یک دایره با سه نقطه اش معین می شود و یک تبدیل موبیوس یک «دایره» را بر یک «دایره» می نگارد. پس می توان تبدیلهای موبیوسی را که یک دایره مفروض صفحه z را بر یک دایره مفروض صفحه w می نگارد به دست آورد. به علاوه سه نقطه متمایز دلخواه دایره اول را می توان بر سه نقطه دلخواه دایره دوم نگاشت.

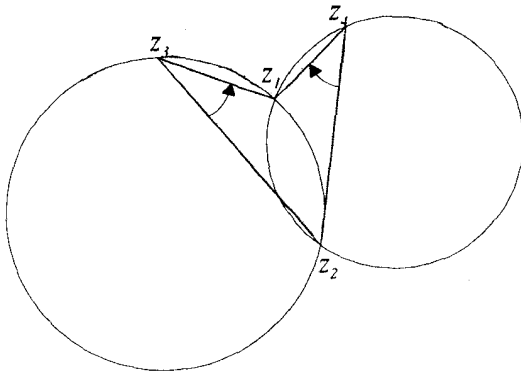
مثال ۱. چهار نقطه z_0, z_1, z_2, z_3 همدایره (یا همخط) اند، اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز آنها، $(z_0, z_1; z_2, z_3)$ ، حقیقی باشد.

برهان دیگر. این همان فرع ۲.۲.۲ است که تاکنون در مواردی چند از آن استفاده نموده ایم، ولی در اینجا برهان دیگری برای آن می آوریم. چهار نقطه همدایره (همخط) هستند، اگر و فقط اگر یک تبدیل موبیوس چنان وجود داشته باشد که این نقاط را بر نقاط محور حقیقی بنگارد. چون نسبت ناهمساز چهار عدد حقیقی، عددی حقیقی است، پس قضیه ثابت شده است.

قضیه ۳.۳.۳. هر تبدیل موبیوس یک تبدیل همدیس است، یعنی یک تبدیل موبیوس زاویه بین دو منحنی متقاطع (اندازه و جهت آن) را محفوظ نگاه می دارد.

برهان. بی آنکه از کلیت کاسته شود، می توان فرض کرد که این دو منحنی دایره اند. فرض کنید z_1, z_2 نقاط تقاطع این دو دایره باشند، z_3 را بر یکی از این دایره و z_4 را بر دیگری اختیار می کنیم. در این صورت:

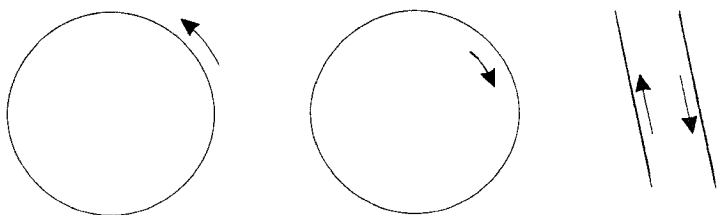
$$\begin{aligned}\arg(z_3, z_4; z_1, z_2) &= \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) - \arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) \\ &= \angle z_2 z_3 z_1 - \angle z_2 z_4 z_1\end{aligned}$$



شکل ۲.۳

فرض کنید z_3 و z_4 هر یک بر دایره مربوطه خود به سمت z_1 میل کنند، در این صورت بنابر فرع پ. ۱۴.۲ سمت راست این رابطه زاویه بین دو دایره متقاطع خواهد شد. (خواننده ای که با هندسه مقدماتی آشنایی ندارد می تواند استدلال بخش بعدی را دنبال کند). اما نسبت ناهمساز بر اثر تبدیل موبیوس پایاست و بنابراین، نتیجه مطلوب به دست می آید. ■

فرض کنید که یک تبدیل موبیوس T دایره C در صفحه z را به دایره C' در صفحه w نگاشته است. دایره C صفحه z را به دو ناحیه Δ_1 و Δ_2 ، و دایره C' صفحه w را به دو ناحیه Δ'_1 و Δ'_2 تقسیم می‌نماید. هر دو نقطه z_1 و z_2 در صفحه z را می‌توان با یک کمان ℓ از دایره و یا پاره‌خطی که دایره C را قطع نکند به هم وصل کرد. در این صورت نگاره ℓ بر اثر تبدیل موبیوس T کمانی از دایره (یا پاره‌خطی) است که نگاره‌های z_1 و z_2 را بهم وصل می‌کند و دایره C' را قطع نمی‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که نگاره‌های z_1 و z_2 یا هر دو در Δ'_1 قرار دارند یا هر دو در Δ'_2 . همین امر در مورد نقاط دلخواه Δ_2 نیز صادق است. چون هر تبدیل موبیوس دوسوئی است، چنانچه به‌ازای مقداری مانند $z \in \Delta_1$ ، نگاره‌اش $T_z \in \Delta'_1$ ، آنگاه نگاره Δ_1 بر اثر تبدیل T باید تمامی Δ'_1 باشد؛ در صورتی که اگر $T_z \in \Delta'_2$ ، نگاره Δ_1 بر اثر T باید تمامی Δ'_2 باشد. اکنون یک دایره C و یکی از شعاعهای آن را در نظر می‌گیریم. نگاره‌های آنها بر اثر هر تبدیل موبیوس T یک دایره C' و یک قوس مستدیری هستند که یکدیگر را به زاویه قائمه قطع می‌کنند. چون هر تبدیل موبیوس جهت‌زوایا را نیز محفوظ نگاه می‌دارد، بلافاصله متوجه می‌شویم که اگر



شکل ۳.۳

با یک تبدیل موبیوس T داخل دایره C به داخل دایره C' نگاشته شود، هنگامی که یک نقطه z در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایره C تغییر مکان دهد، نگاره آن، w ، نیز در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایره C' تغییر مکان خواهد داد. از طرف دیگر، اگر داخل C ، بر خارج C' نگاشته شود، آنگاه هنگامی که یک نقطه z در جهت خلاف عقربه‌های ساعت بر دایره C حرکت نماید، نگاره‌اش w در جهت عقربه‌های ساعت بر دایره C' حرکت خواهد کرد.

به عکس اگر یک نقطه z و نگاره‌اش w بر اثر یک تبدیل موبیوس T بر دایره مربوطه در یک جهت حرکت نمایند، آنگاه T داخل دایره C را به داخل دایره C' می‌برد، در صورتی که اگر z و w در دو جهت مختلف حرکت نمایند، T داخل دایره C را به خارج دایره C' می‌برد.

مناسبت‌ترین است که قرارداد ذیل را بپذیریم: یک دایره (یا یک منحنی) را به صورت یک منحنی جهت‌دار (معمولاً با معادلات پارامتریش) در نظر می‌گیریم، در این صورت هنگامی که نقطه‌ای بر این دایره (منحنی بسته) حرکت می‌کند ناحیه‌ای را که ناظر در «طرف چپ» می‌بیند، بنابر تعریف، داخل می‌گیریم. با این قرارداد یک تبدیل موبیوس داخل (یک دایره) را به داخل (یک دایره) می‌نگارد.

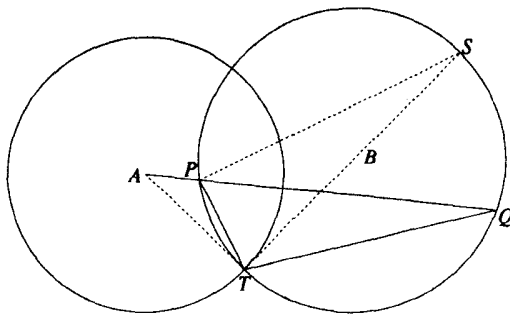
۴.۳ اصل تقارن

فرض می‌کنیم دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را به زاویه قائمه قطع کرده‌اند. فرض کنید شعاعی که از A می‌گذرد دایره B را در نقاط P و Q قطع کند.

T را یکی از دو نقطه تقاطع دایره A و B (استدلال ما به این امر که T کدام یک از نقاط تقاطع باشد وابسته نیست - همچنین اگر جاهای P و Q باهم عوض شوند، فقط اندک اصلاحاتی مورد نیاز واقع می‌شود) و TS را قطری از دایره B می‌گیریم. پس:

$$\angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{4} - \angle PTS = \angle ATP$$

$$\therefore \Delta ATP \sim \Delta AQT$$



شکل ۴.۳

(توجه کنید که در این فصل دیگر روی همجهت بودن دو مثلث متشابه پافشاری نمی‌کنیم.) از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AQ}$$

$$\therefore \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AT}^2 = r^2$$

که در آن r شعاع دایره A است. بویژه نقطه Q فقط به دایره B بستگی دارد، بدین معنی که دایره B بر دایره A عمود است و از نقطه P می‌گذرد. اما بینهایت از این دایره وجود دارند. دو نقطه P و Q را قرینه یا منعکس یکدیگر نسبت به دایره A گویند، هرگاه هر دو نقطه P و Q روی شعاعی باشند که از نقطه A (مرکز دایره) می‌گذرد و $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = r^2$ ، که r شعاع دایره A است.

مرکز این دایره و نقطهٔ بینهایت قرینهٔ یکدیگرند و قرینهٔ یک نقطهٔ واقع بر دایره بر خودش منطبق است. اگر دایره به خط بدل شود، دو نقطه فقط و فقط وقتی قرینهٔ یکدیگرند که نسبت به این خط قرینهٔ یکدیگر باشند.

بحث فوق، نیمهٔ اول برهان لم زیر است:

لم ۱.۴.۳. اگر دایرهٔ B بر یک دایرهٔ A عمود باشد و از نقطه‌ای مانند P بگذرد، آنگاه باید از نقطهٔ Q ، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ A ، نیز بگذرد. به عکس، اگر دایره‌ای مانند B از دو نقطهٔ P و Q ، که نسبت به دایرهٔ A قرینهٔ یکدیگرند بگذرند، آنگاه دو دایرهٔ A و B برهم عمودند. برهان. برهان عکس قضیه تنها با معکوس کردن استدلال فوق، حاصل می‌شود. با نمادهای فوق بنا به فرض داریم:

$$\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AQ} \quad \text{یعنی} \quad \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AT}^2$$

در نتیجه:

$$\therefore \Delta ATP \sim \Delta AQT$$

بنابراین:

$$\angle ATP = \angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{2} - \angle PTS$$

$$\therefore \angle ATB = \frac{\pi}{2}$$

قضیهٔ ۲.۴.۳. (اصل تقارن). تبدیل موبیوس، تقارن را حفظ می‌کند.

برهان. فرض می‌کنیم دو نقطهٔ P و Q نسبت به دایرهٔ A متقارن باشند و تبدیل موبیوس T نقاط P و Q را به ترتیب به نقاط P' و Q' بنگارد و دایرهٔ A را به دایرهٔ A' می‌خواهیم نشان دهیم که نقاط P' و Q' نسبت به دایرهٔ A' قرینه‌اند.

فرض کنید B' دایرهٔ دلخواهی باشد که از نقطهٔ P' گذشته و بر دایرهٔ A' عمود است. پس پیشنگارهٔ $T^{-1}B'$ دایره‌ای است عمود بر دایرهٔ A (زیرا T^{-1} تبدیلی موبیوس، و لذا همدیس است) و از نقطهٔ $T^{-1}P' = P$ می‌گذرد. با توجه به لم پیش، دایرهٔ $T^{-1}B'$ نیز باید از نقطهٔ Q بگذرد. از اینجا نتیجه می‌شود که دایرهٔ B' باید از نقطهٔ Q' بگذرد، یعنی Q' قرینهٔ P' نسبت به دایرهٔ A' باشد.

مثال ۱. تبدیل موبیوسی که دایرهٔ $|z| = 1$ را بر دایرهٔ $|w| = 1$ می‌نگارد باید

به صورت زیر باشد:

$$w = k \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (|k| = 1, |\alpha| \neq 1)$$

اثبات. فرض کنید α ($\alpha \neq \infty, |\alpha| \neq 1$) نقطه‌ای باشد که بر $w = 0$ نگاشته شده است. پس نگارهٔ قرینه‌اش $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ (نسبت به دایره‌یکه) باید $w = \infty$ باشد.

$$\therefore w = k' \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (k = -\bar{\alpha}k')$$

چون تساوی $|w| = 1$ وقتی برقرار است که داشته باشیم $|z| = 1$ ، با قرار دادن $z = 1$ خواهیم داشت:

$$1 = |k| \cdot \left| \frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}} \right| = |k|$$

اگر $\alpha = \infty$ ، داریم $w = \frac{k}{z}$ و $|k| = 1$ ، به عکس، اگر

$$w = k \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (|k| = 1, |\alpha| \neq 1)$$

آنگاه به ازای $|z| = 1$ ،

$$|w| = |k| \cdot \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{\bar{z}(z - \alpha)}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{1 - \alpha\bar{z}}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1$$

بنابراین تبدیل موبیوسی که چنین به دست آید در آن شرط صدق می‌کند. داخل دایره‌یکه صفحهٔ z به ترتیب بر داخل یا خارج دایرهٔ یکه صفحهٔ w نگاشته می‌شود هرگاه $|\alpha| > 1$ یا $|\alpha| < 1$.
مثال ۲. هر تبدیل موبیوس که محور حقیقی صفحهٔ z را بر دایرهٔ $|w| = 1$ در صفحهٔ w بنگارد، باید به شکل

$$w = k \frac{z - \mu}{z - \bar{\mu}} \quad (|k| = 1, \mu \notin \mathbb{R})$$

اثبات. نقاط صفحهٔ z متناظر با $\infty, 0$ باید نسبت به محور حقیقی قرینه یکدیگر، یعنی مزدوج مختلط یکدیگر باشند. بنابراین:

$$w = k \frac{z - \mu}{z - \bar{\mu}} \quad (\mu \notin \mathbb{R})$$

هنگامی که z حقیقی است، داریم $1 = \left| \frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}} \right|$ و w باید بر دایره یکه واقع باشد. یعنی $|w| = 1$ و از آنجا $|k| = 1$. به عکس، روشن است که تبدیلهای موبیوس به شکل بالا در شرایط مطلوب صدق خواهند کرد. نیمه بالائی صفحه z بر داخل یا خارج دایره یکه $|w| = 1$ نگاشته می شود. بسته به اینکه $\Im \mu > 0$ یا $\Im \mu < 0$.

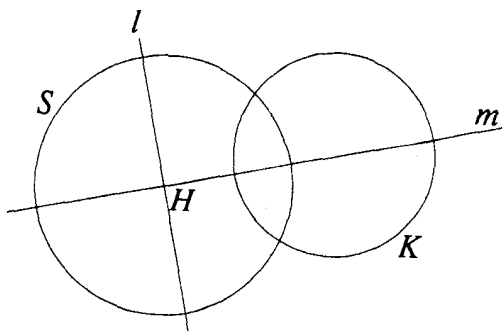
۵.۳ یک جفت دایره

قبلاً دیده ایم که با یک تبدیل موبیوس می توان یک دایره دلخواه از صفحه z را بر یک دایره مشخصی در صفحه w نگاشت. اما در مورد یک جفت دایره چگونه؟ آیا همواره می توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایره دلخواه C_1 و C_2 در صفحه Z را بر یک جفت دایره مشخص C'_1 و C'_2 در صفحه w نگاشت؟ چون تبدیل موبیوس همدیس است واضح است که اگر C_1 و C_2 یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند، C'_1 و C'_2 نیز باید یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند. اما اگر این شرط برقرار باشد، آیا می توانیم وجود چنین تبدیل موبیوسی را تضمین کنیم؟

پاسخ مثبت است. برای اثبات این حکم کافی است ثابت کنیم که می توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایره دلخواه C_1 و C_2 را، که یکدیگر را به زاویه θ قطع می کنند، بر محور حقیقی و خط $x \sin \theta - y \cos \theta$ نگاشت. (چرا کافی است؟). اما انجام این کار ساده است. خیلی ساده، یکی از دو دایره متقاطع C_1 و C_2 را بر نقطه ∞ می نگاریم. بدین ترتیب نگاره های C_1 و C_2 دو خط متقاطع می شوند که زاویه بین آنها θ است. حال نقطه تقاطع این دو خط را به مبدأ انتقال می دهیم و با یک دوران مناسب کار تمام می شود.

در استدلال بالا فرض کردیم که (پیمانه π) $\theta \neq 0$. (در کجا از این فرض استفاده کردیم؟) خوب، اگر این دو دایره بر هم مماس بودند چگونه؟ می گوئیم که با یک تبدیل موبیوس، دو دایره مماس بر هم دلخواه را می توان بر یک جفت دایره مماس بر هم مشخص C'_1 و C'_2 نگاشت. باز کافی است ثابت کنیم که یک جفت دایره مماس بر هم دلخواه C_1 و C_2 را می توان با یک تبدیل موبیوس بر دو خط موازی $y = 0$ و $y = 1$ نگاشت. باز هم انجام این کار ساده است: نقطه تماس این دو دایره را بر نقطه بینهایت می نگاریم، که در این صورت نگاره های دایره C_1 و C_2 یک جفت خط موازی خواهند شد. حال با یک انتقال و یک اتساع (یعنی یک دوران و به دنبال آن یک بزرگنمایی) به منظور خود می رسیم.

می ماند حالت دو دایره ای که متقاطع نیستند. گوئیم با یک تبدیل موبیوس همواره می توان یک جفت دایره نامتقاطع را بر یک جفت دایره هم مرکز نگاشت. برای اثبات این ادعا، ابتدا نقطه ای بر یکی از این دو دایره، مثلاً C_2 ، اختیار کرده آن را بر نقطه بینهایت می نگاریم. در این صورت نگاره های C_1 و C_2 ، دایره و خطی می شوند که یکدیگر را قطع نمی کنند. این دایره را k و این خط را ℓ می نامیم. فرض کنید m خطی باشد که از مرکز دایره k گذشته و بر خط ℓ عمود باشد. H را



شکل ۵.۳

فصل مشترک خطهای l و m می‌گیریم. توجه داریم که H خارج دایره k است. دایره‌ای مانند S به مرکز H و عمود بر k رسم می‌کنیم. (برای این منظور کافی است شعاع این دایره را طول مماس مرسوم از H بر این دایره بگیریم. لذا دایره S مشخص می‌شود). بالاخره یکی از نقاط تقاطع خط m و دایره S (هر کدام را که خواستید) را بر نقطهٔ بینهایت می‌نگاریم. پس نگاره‌های دایره k و خط l دو دایره هستند که هر دو بر نگاره‌های دایره S و خط l عمودند. اما نگاره‌های دایره S و خط m ، دو خط متعامدند. بنابراین باید نگاره‌های دایره k و خط l یک جفت دایره هم‌مرکز باشند. به دقت توجه کنید؛ چنین نیست که می‌توان یک جفت دایره نامتقاطع دلخواه را بر یک جفت دایره هم‌مرکز قبلاً مشخص شده‌ای نگاشت. چه، اگر دو دایره نامتقاطع داده شده باشند، نسبت شعاعهای دو دایره هم‌مرکزی که بتوان دو دایره مفروض را بر آنها نگاشت عددی است مشخص و در اختیار ما نیست.

مثال. فرض می‌کنیم $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ قرص بسته دایره یکه باشد و D' قرص بسته دیگری درون D . (به‌ویژه دایره مرزی بسته D و D' یکدیگر را قطع نمی‌کنند). می‌خواهیم نشان دهیم که تبدیل موبیوسی وجود دارد که این قرص دایره بسته یکه را بر خودش و قرص D' را بر قرص $\{w \in \mathbb{C}; |w| \leq r\}$ ، با یک شعاع متناسب r ، بنگارد. به پیروی از شوینبِگ (۱۹۰۳-۱۹۹۱)* محاسبه را چنین دنبال می‌کنیم:

بی‌آنکه از کلیت مسأله کاسته شود، در صورت لزوم با دورانی مناسب، می‌توان فرض کرد که مرکز D' بر محور حقیقی واقع است و خط

$$[a, b] = D' \cap \{z \in \mathbb{C}; \Im z = 0\}$$

قطری از D' است. اگر $a + b = 0$ ، مسأله اثبات شده است. پس بی‌آنکه از کلیت کاسته شود

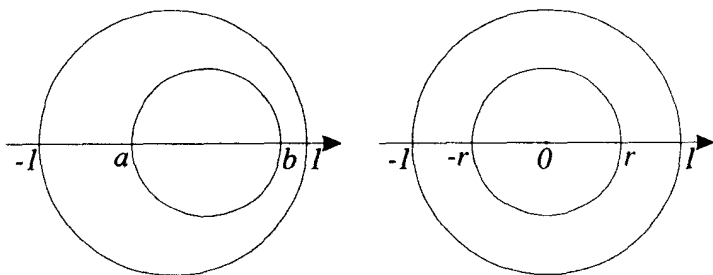
* *Mathematical Time Exposures*, Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1982, pp. 188-189.

می‌توان فرض کرد $a + b > 0$. (در واقع حتی اگر $a + b < 0$ ، با اصلاح جزئی استدلال ما معتبر خواهد بود).

با یادآوری مثالی از بخش قبل و توجه به این‌که دو قرص دایره در صفحه z و نگاره‌های آنها در صفحه w ، همه نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند، می‌کوشیم تبدیل مویبوسی به صورت

$$w = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

پیدا کنیم که در آن α عدد حقیقی مناسبی باشد که باید تعیین کنیم. چون همه ضرایب حقیقی‌اند، این تبدیل مویبوس محور حقیقی را بر خودش می‌نگارد. به علاوه -1 و 1 دو نقطه ثابت این تبدیل مویبوس‌اند. چون هر تبدیل مویبوس هم‌دیس است، و مرز دایره‌های قرصهای D و D' محور حقیقی را به زاویه قائمه قطع می‌کنند، کافی است نشان دهیم که می‌توان عددی حقیقی مانند α



شکل ۶.۳

چنان یافت که a و b را به $-r$ و r (r عددی حقیقی) بنگارد. معنی این، این است که معادله

$$\frac{a - \alpha}{1 - \alpha a} + \frac{b - \alpha}{1 - \alpha b} = 0$$

باید ریشه‌های حقیقی داشته باشد. با مرتب نمودن این معادله برحسب α خواهیم داشت.

$$\alpha^2 - \frac{2(1 + ab)}{a + b}\alpha + 1 = 0$$

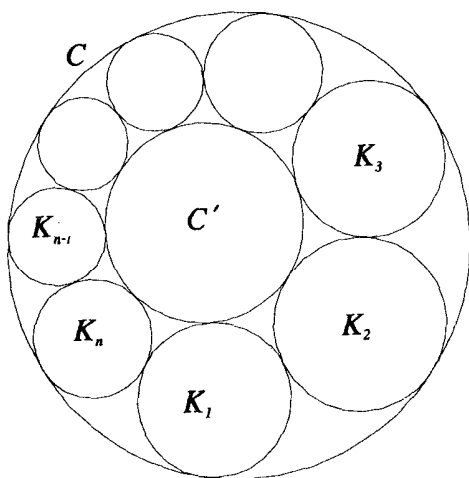
با محاسبه $\frac{1}{4}$ مبین آن:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + ab}{a + b}\right)^2 - 1 &= \frac{1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2}{(a + b)^2} \\ &= \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{(a + b)^2} > 0 \quad (\because -1 < a < b < 1) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادله ریشه‌های حقیقی دارد. به علاوه از علامتهای ضرایب معادله دیده می‌شود که هر دو ریشه مثبت‌اند. چون حاصلضرب ریشه‌ها برابر ۱ است (با توجه به فرض ما که دایره مرزی D و D' متقاطع نیستند، $\alpha = 1$ ریشه نیست)، نتیجه می‌گیریم که یکی از ریشه‌ها بین ۰ و ۱ است و دیگری بزرگتر از ۱. ریشه بین صفر و یک را α خودمان می‌گیریم و کار تمام است. تبصره. الف) درواقع، اگر صرفاً بخواهیم دو دایره مرزی را بر یک جفت دایره هم‌مرکز بنگاریم، با یک انتخاب می‌توانیم این کار را انجام دهیم. انتخاب ما بستگی به این دارد که بخواهیم دایره کوچکتر را به یک دایره کوچکتر بنگاریم.

ب) حتی اگر $D' \supset D$ (یعنی $a < -1$ و $b > 1$)، فقط با اندکی اصلاح استدلال ما معتبر خواهد بود.

قضیه ۱.۵.۳. (ی. اشتاینر). فرض می‌کنیم C و C' دو دایره در صفحه باشند که یکی (مثلاً C') درون دیگری (دایره C) واقع باشد. دایره‌ای مثل K_1 رسم می‌کنیم که مماس داخل بر C و مماس خارجی بر C' باشد. بعد دایره‌ای مثل K_2 رسم می‌کنیم که مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر C' باشد. این روند را ادامه می‌دهیم تا یک رشته دایره K_1, K_2, \dots, K_n ($n \geq 3$) که هر K_j مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر C' و K_{j+1}, K_{j-1} ($2 \leq j \leq n-1$) و C' است، به دست آوریم. اگر چنین پیش آید که K_n بر K_1 (و البته بر C و C' و همچنین بر K_{n-1}) مماس شود، انتخاب جای دایره اولیه K_1 هرچه باشد باز هم K_n بر K_1 مماس خواهد شد. برهان. وقتی دایره C و C' را با یک تبدیل موبیوسی بر دو دایره هم‌مرکز بنگاریم، بداهت قضیه به روشنی دیده خواهد شد. ■



شکل ۷.۳

تصوره. برای حالتی که بتوان یک رشته از n دایره مماس بر هم در دایره C محاط کرد، اشتاینر رابطه‌ای بین r و r' یعنی شعاعهای دایره C ، C' و خط‌المرکزین d این دو به دست آورده است:

$$d^2 = (r - r')^2 - 4rr' \tan^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

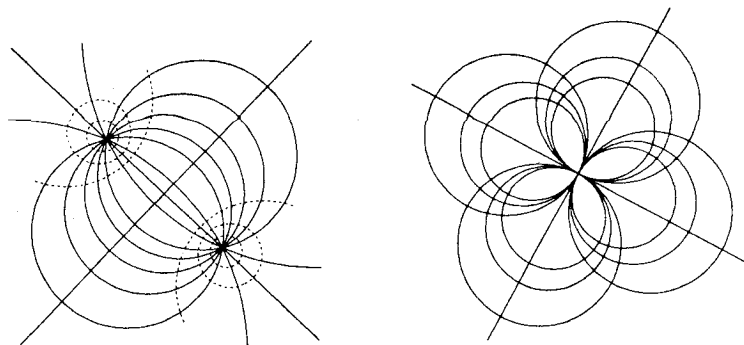
۶.۳ دسته دایره‌ها

دو دایره C_1 و C_2 مفروض‌اند. مجموعه همه دایره عمود بر این دو دایره C_1 و C_2 را دسته دایره‌های مزدوج C_1 و C_2 گویند.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره C_1 و C_2 در صفحه z متقاطع باشند. به موجب بحث بخش قبلی می‌توانیم C_1 و C_2 را با یک تبدیل موبیوس بر دو خط متقاطع در مبدأ صفحه توسیعی w بنگاریم. چون شرط لازم و کافی برای اینکه یک دایره بر دو خط متقاطع عمود باشد این است که مرکزش بر نقطه تقاطع این دو خط منطبق باشد، دسته دایره‌های مزدوج با دو دایره C_1 ، C_2 باید بر مجموعه همه دایره هم‌مرکز به مرکز $w = 0$ نگاشته شوند. به ازای هر نقطه از صفحه توسیعی w ، غیر از نقاط مبدأ و بینهایت، فقط و فقط یک دایره هم‌مرکز در این دسته دایره‌ها وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد. مبدأ و نقطه بینهایت را نقاط حدی این دسته دایره‌ها می‌خوانند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه z ، معنی این نکته این است که از هر نقطه صفحه توسیعی z (غیر از نقاط تقاطع دایره C_1 ، C_2) دقیقاً یک دایره از این دسته دایره می‌گذرد و هیچ دو دایره‌ای از این دایره در دسته دایره‌ها، همدیگر را قطع نمی‌کنند. رشته‌های این نوع دایره‌ها را دسته‌های دایره‌های هذلولوی می‌نامند.

اکنون حالتی را مورد توجه قرار می‌دهیم که دو دایره C_1 و C_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند. در این حالت با یک تبدیل موبیوس می‌توانیم این دو دایره را به دو دایره هم‌مرکز به مرکز مبدأ مختصات در صفحه w بنگاریم. اما یک «دایره» فقط و فقط هنگامی بر دو دایره هم‌مرکز عمود است که خطی باشد که از مرکز این دایره بگذرد. از این رو نگاره دسته دایره‌های مزدوج با دو دایره C_1 و C_2 باید مجموعه همه «دایره‌ی» باشند که از مبدأ و نقطه بینهایت صفحه w می‌گذرند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه z ، معنی این مطلب این است که دو نقطه وجود دارند به طوری که دایره ماژ بر این دو نقطه فقط آن دایره‌ی هستند که بر دو دایره مفروض C_1 و C_2 عمودند. این دو نقطه تنها دو نقطه‌ای هستند که قرینه یکدیگر نسبت به هر دو دایره C_1 و C_2 هستند. این نقاط را نقاط مشترک این دسته دایره‌ها گویند. دسته دایره‌های متشکل از همه دایره ماژ بر دو نقطه ثابت را، دسته دایره‌های بیضوی گویند (شکل ۸.۳).

بالاخره حالتی را در نظر می‌گیریم که دو دایره مفروض C_1 و C_2 در صفحه z بر هم مماس باشند. در این حالت می‌توانیم C_1 و C_2 را به دو خط متوازی در صفحه w بنگاریم. یک «دایره» فقط و فقط، هنگامی بر دو خط متوازی عمود است که خطی باشد عمود بر آن دو خط متوازی.



شکل ۸.۳

بنابراین دسته دایره‌های اولیه مزدوج با C_1 و C_2 باید با یک تبدیل موبیوس بر مجموعه‌ای از خطوط عمود بر این دو خط متوازی نگاشته شوند. در رابطه با شکل اولیه در صفحه z ، معنی این مطلب این است که از هر نقطه، بجز نقطه تماس دو دایره، فقط و فقط یک دایره وجود دارد که از این نقطه می‌گذرد و در نقطه تماس دایره C_1 و C_2 بر آنها عمود است. دایره این دسته یک نقطه مشترک دارند که در این نقطه بر هم مماس‌اند. این نوع دسته دایره‌ها را دسته دایره‌های سهموی نامند (شکل ۸.۳).

روشن است که نوع دسته بر اثر یک تبدیل موبیوس عوض نمی‌شود. چون دسته دایره‌های هم‌مرکز به مرکز مبدأ بر دسته خط‌های مار از مبدأ عمودند، ملاحظه می‌کنیم که یک دسته دایره هذلولوی ممکن است بر یک دسته دایره بیضوی عمود باشد. اگر دو دسته دایره این ویژگی را داشته باشند که هر دایره از این دسته بر هر دایره از دسته دیگر عمود باشد، آنها را دسته دایره‌های مزدوج می‌نامند. از این‌رو هر دسته دایره هذلولوی دقیقاً یک دسته دایره مزدوج دارد که بیضوی است؛ و به عکس هر دسته دایره بیضوی یک دسته مزدوج دارد که هذلولوی است. دسته دایره سهموی را می‌توان دوبه‌دو با هم مزدوج گرفت، به‌خصوص اگر دو دایره دلخواه داده شده باشند، منحصرأ یک دسته دایره وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست. این دسته دایره، برحسب اینکه دو دایره داده شده، 0 ، 1 ، یا دو نقطه تقاطع داشته باشند، هذلولوی، سهموی یا بیضوی خواهند بود.

۷.۳ نقاط ثابت و رده‌بندی تبدیلهای موبیوس

یک نقطه z_0 را نقطه ثابت تبدیل موبیوس T گویند، هرگاه $Tz_0 = z_0$. نقطه ثابت یک تبدیل موبیوس

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

باید در معادله

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

صدق کند. چون این معادله، یک معادله درجه دوم برحسب z است، اگر تبدیل موبیوسی مانند T سه (یا بیشتر) نقطه ثابت داشته باشد، تمام ضرائب معادله بالا باید صفر باشند؛ یعنی

$$c = 0, \quad d - a = 0, \quad b = 0$$

و بنابراین T تبدیلی همانی است. در آنچه از این پس خواهد آمد، این حالت کنارگذاشته خواهد شد.

الف) اگر $c = 0$ و $a - d = 0$ ، T معرّف انتقال:

$$w = Tz = z + k \quad \left(k = \frac{b}{a} \right)$$

است، و لذا نقطه بینهایت، نقطه ثابت یکتای T است. اگر $c = 0$ و $a - d \neq 0$ ، T به صورت

$$w = Tz = \left(\frac{a}{d} \right) z + \left(\frac{b}{d} \right)$$

خواهد بود و دو نقطه $b/(d-a)$ و بینهایت نقاط ثابت آن خواهند بود. در این حالت، اگر بنویسیم:

$$Sz = z - \frac{b}{d-a}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} S(Tz) &= Sw = w - \frac{b}{d-a} = \left(\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \right) - \frac{b}{d-a} \\ &= \frac{a}{d} \left(z - \frac{b}{d-a} \right) = \frac{a}{d} Sz \end{aligned}$$

یعنی

$$T = S^{-1}US$$

که در آن $Uz = \frac{a}{d}z$ معرّف یک اتّساع است.

ب) اگر $c \neq 0$ و $D \neq 0$ که $D = (d-a)^2 + 4bc$ مبین معادله درجه دوم مذکور است، آنگاه T دو نقطه ثابت متمایز

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{D}}{2c} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$$

دارد. در این حالت، اگر بنویسیم:

$$Sz = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

یعنی:

$$S(Tz) = Sw = k(Sz) \quad \therefore T = S^{-1}US$$

که در آن

$$Uz = kz \quad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} \right)$$

یک اتساع است. اگر $c \neq 0$ و $D = 0$ ، آنگاه T دارای یک نقطه ثابت یکتای

$$\alpha = \beta = \frac{a-d}{2c}$$

است. چون T ، $z = \alpha$ را بر $w = \alpha$ می‌نگارد، به‌ازای مقادیر ثابت متناسب h و k می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{h}{z-\alpha} + k$$

با قرار دادن $z = \infty$ و $w = \frac{a}{c}$ و همچنین $z = 0$ و $w = \frac{b}{d}$ ، برای مقادیر k و h خواهیم داشت:

$$k = \frac{2c}{a+d}, \quad h = 1$$

بنابراین، اگر قرار دهیم

$$Sz = \frac{1}{z - \alpha}$$

آنگاه

$$S(Tz) = Sw = \frac{1}{w - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{2c}{a + d} = V(Sz)$$

یعنی

$$T = S^{-1}VS$$

که در آن $Vz = z + k$ یک انتقال است.

دو تبدیل موبیوس T_1 و T_2 را متشابه گویند هرگاه تبدیل موبیوس سوّمی مانند S چنان وجود داشته باشد که $T_2 = S^{-1}T_1S$.

پس قضیه زیر را ثابت نمودیم:

قضیه ۱.۷.۳. فرض می‌کنیم

$$w = Tz = \frac{az + b}{cz + d}$$

یک تبدیل موبیوس باشد و $D = (a - d)^2 + 4bc \neq 0$.

الف) حالت $c = 0$. اگر $D = 0$ ، نقطهٔ بینهایت، نقطهٔ ثابت یکتای T است و T را می‌توان به صورت نرمال:

$$w = z + k \quad \left(k = \frac{b}{d} \right)$$

نوشت. اگر $D \neq 0$ ، T دارای دو نقطهٔ ثابت متمایز $\gamma = b/(d - a)$ و نقطهٔ بینهایت است و T را می‌توان به صورت نرمال:

$$w - \gamma = k(z - \gamma) \quad \left(k = \frac{a}{d} \right)$$

نوشت.

ب) حالت $c \neq 0$. اگر $D \neq 0$ ، T دو نقطهٔ ثابت متمایز دارد:

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{D}}{2c}, \quad \beta = \frac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$$

و T را می‌توان به صورت نرمال:

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k \frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} = \frac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}} \right)$$

نوشت. اگر $D = 0$ ، T یک نقطه ثابت یکتای $\alpha = (a-d)/2c$ دارد و می‌توان T را به صورت نرمال

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k \quad \left(k = \frac{2c}{a+d} \right)$$

نوشت:

به عبارت دیگر:

الف) یک تبدیل موبیوس T دارای دو نقطه ثابت است، اگر و فقط اگر $D \neq 0$ ، و در این حالت T با یک اتساع مشابه است. اثنا:

ب) T یک نقطه ثابت یکتا دارد اگر و فقط اگر $D = 0$ ، و در این حالت T با یک انتقال مشابه است.

تبصره. فرض می‌کنیم $U_1 z = k_1 z$ و $U_2 z = k_2 z$ دو اتساع باشند. U_1 و U_2 متشابه‌اند اگر و فقط اگر ضرایب k_1 و k_2 یا برابر باشند و یا عکس یکدیگر (یعنی یا $k_1 = k_2$ یا $k_1 = 1/k_2$). ولی چون هر انتقال $w = z + k$ را می‌توان به صورت $(\frac{w}{k}) = (\frac{z}{k}) + 1$ نوشت، هر انتقالی (از طریق یک اتساع) با انتقال $w = z + 1$ مشابه است. به عبارت دیگر، هر دو انتقال با یکدیگر مشابه‌اند. فرض کنید

$$w = Tz = \frac{az+b}{cz+d}$$

یک تبدیل موبیوس با $D = (d-a)^2 + 4bc \neq 0$ باشد. در این صورت تبدیل موبیوسی مانند S با ویژگی $Sw = S(Tz) = U(Sz)$ یعنی $W = UZ$ وجود دارد که $UZ = kZ$ یک اتساع است. اگر $k > 0$ (ولی $k \neq 1$)، T را تبدیل هذلولوی موبیوس گویند، اگر $|k| = 1$ (باز هم $k \neq 1$)، T را بیضوی خوانند و در همه حالات دیگر آن را ثابت زاویه (loxodromic) می‌نامند.

اگر T هذلولوی باشد، U هر خط مارّ بر مبدأ از صفحه Z را بر خودش می‌نگارد، ولی یک دایره به مرکز مبدأ را بر دایره دیگری می‌نگارد. درباره دوائر واقع در صفحه اولیه z و صفحه w ، این

بدین معنی است که هر دایره از دسته دایره (بیضوی) P که از دو نقطه ثابت T بگذرد بر خودش نگاشته می‌شود، در صورتی که هر دایره از دسته دایره‌های مزدوج (هذلولوی) Q که نقاط حدی آن دو نقطه ثابت T باشند، بر دایره دیگری از همان دسته دایره‌ها نگاشته می‌شود. به‌ویژه یک دایره آپولونیوس

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = h$$

(که α و β نقاط ثابت T ، و h عددی ثابت است) بر دایره آپولونیوس دیگر؛

$$\left| \frac{w - \alpha}{w - \beta} \right| = hk$$

نگاشته می‌شود.

اگر T بیضوی باشد، U دورانی است (به شناسه k) در صفحه Z . پس کافی است فقط نقشه‌های دسته دایره‌های P و Q مذکور در بخش قبلی را با یکدیگر عوض کنیم.

اگر $D = 0$ ، تبدیل موبیوس T را سهموی گوئیم، و در این حالت T نقطه ثابت یکتایی دارد و با یک انتقال

$$W = VZ = Z + k$$

مشابه است. اما، V هر خط موازی با بردار k در صفحه Z را بر خودش، و هر خط عمود بر بردار k را بر خط دیگری عمود بر بردار k ، می‌نگارد. درباره دایره واقع در صفحه اولیه z ، این امر بدین معنی است که دسته دایره‌ای (سهموی) مانند P مماس بر یکدیگر در نقطه ثابت یکتای T وجود دارد، با این ویژگی که هر دایره در P بر اثر T بر خودش نگاشته می‌شود درحالی‌که هر دایره از دسته دایره‌های (سهموی) مزدوج Q (دسته دایره‌هایی عمود بر P در نقطه تماس مشترک دایره در P) بر دایره دیگری از Q نگاشته می‌شود.

۸.۳ انعکاس

نقطه P و دایره‌ای به مرکز O داده شده‌اند، منعکس نقطه P نسبت به این دایره، بنا به تعریف، نقطه‌ای است مانند Q واقع بر شعاع مارِ P ، به‌طوری‌که:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$$

r شعاع دایره O است. O را مرکز انعکاس و دایره O را دایره انعکاس گویند. بیشترین قضایای مورد نیاز ما در انعکاس از قضیه ۱.۸.۳ و قضایای متناظر با آن درباره تبدیلیهای موبیوس نتیجه می‌شوند.

قضیه ۱.۸.۳. فرض می‌کنیم z_j^* منعکسهای z_j ها ($j = 0, 1, 2, 3$) نسبت به یک دایره باشند. در این صورت

$$(z_0^*, z_1^*; z_2^*, z_3^*) = \overline{(z_0, z_1; z_2, z_3)}$$

برهان. فرض می‌کنیم T تبدیل موبیوسی است که دایره انعکاس را بر محور حقیقی می‌نگارد. چون تبدیل موبیوس، تقارن را محفوظ نگاه می‌دارد، نقاط z_j و z_j^* بر مزدوجهای مختلط‌شان نگاشته می‌شوند: یعنی اگر $w_j = Tz_j$ ، آنگاه $w_j^* = Tz_j^*$ ($j = 0, 1, 2, 3$). به علاوه، چون هر تبدیل موبیوس نسبتهای ناهمساز را محفوظ نگه می‌دارد، داریم

$$\begin{aligned} (z_0^*, z_1^*; z_2^*, z_3^*) &= (Tz_0^*, Tz_1^*; Tz_2^*, Tz_3^*) \\ &= (\overline{w_0}, \overline{w_1}; \overline{w_2}, \overline{w_3}) = \overline{(w_0, w_1; w_2, w_3)} \\ &= \overline{(Tz_0, Tz_1; Tz_2, Tz_3)} = \overline{(z_0, z_1; z_2, z_3)} \end{aligned}$$

از آنجا که شرط لازم و کافی برای همدایره بودن چهار نقطه، حقیقی بودن نسبت ناهمساز آنهاست (و مزدوج مختلط یک عدد حقیقی خود آن عدد حقیقی است)، بلافاصله قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه ۲.۸.۳. انعکاس دایره‌ها را محفوظ نگاه می‌دارد.

به آسانی می‌بینیم که انعکاس هم دایره انعکاس را بر خودش می‌نگارد و هم خط مارّ بر مرکز انعکاس را. به علاوه دایره‌ای که از مرکز انعکاس بگذرد بر خطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد ولی موازی مماس بر این دایره در مرکز انعکاس است، نگاشته می‌شود. عکس این مطلب نیز درست است. زیرا فرض کنید O مرکز انعکاس و OA قطری از این دایره است که باید منعکسش را تعیین کنیم و B منعکس A است. در این صورت به ازای هر نقطه P از این دایره و منعکس آن Q داریم

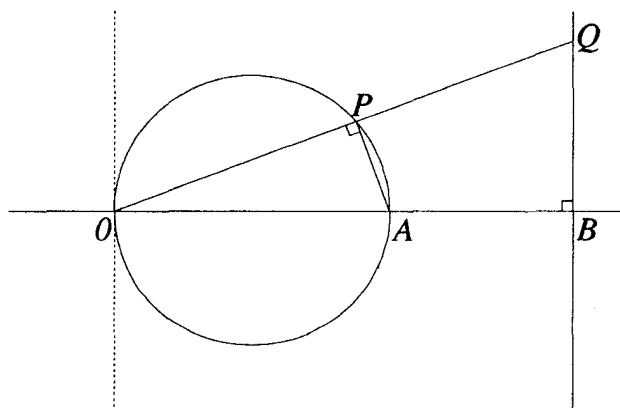
$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

(که r شعاع دایره انعکاس است). یعنی

$$\overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ} \quad \therefore \triangle OAP \sim \triangle OQB$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\angle OBQ = \angle OPA = \frac{\pi}{2}$$



شکل ۹.۳

به عکس فرض کنید، خطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد داده شده باشد. B را پای عمود وارد از O بر این خط و A را منعکس B می‌گیریم. پس به‌ازای هر نقطه Q از این خط، و منعکس آن P ، داریم:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}; \quad \overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ}$$

$$\therefore \triangle OAP \sim \triangle OQB$$

از این رو $\angle OPA = \angle OBQ = \frac{\pi}{2}$ ، و لذا P بر دایره‌ای به قطر OA واقع است. بالاخره، دایره‌ای که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد بر دایره دیگری که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد نگاشته می‌شود. با تأسی به برهان قضیه ۳.۳.۳ که تبدیلهای موبیوس هم‌دیس‌اند (و با توجه به اینکه به‌ازای هر عدد مختلط: $\alpha \neq 0$ ، $\arg \bar{\alpha} \equiv -\arg \alpha \pmod{2\pi}$)، قضیه زیر به‌دست می‌آید:

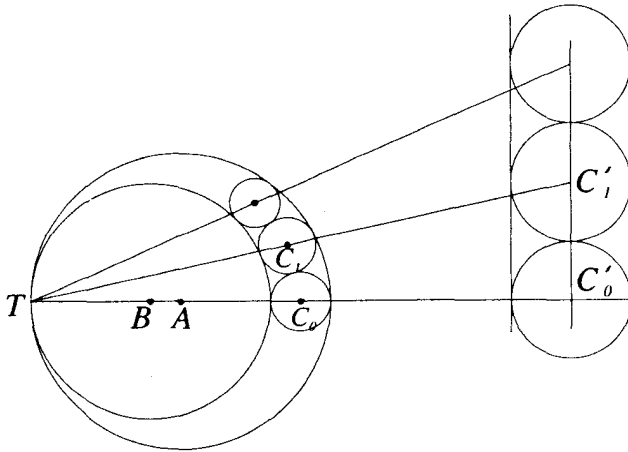
قضیه ۳.۸.۳. انعکاس تبدیلی است حافظ زاویه؛ یعنی اندازه زاویه را محفوظ نگاه می‌دارد ولی جهت آن را عوض می‌کند.

بنابراین، انعکاس، یک زوج دایره متقاطع را به یک زوج دایره متقاطع باهمان زاویه نقطه تقاطع (صرفنظر از جهت زوایا) می‌نگارد. به‌خصوص یک زوج دایره متعامد را بر یک زوج دایره متعامد،

و یک زوج دایره مماس برهم را بر یک زوج دایره مماس می‌نگارد. به علاوه یک دایره عمود بر دایره انعکاس را بر خودش می‌نگارد (بنابه تعریف تقارن).
اولین استفاده ما از انعکاس.

مثال. (پاپوس) فرض کنید دو دایره A و B مماس داخلی هستند و دایره B داخل دایره A است. C را دایره‌ای می‌گیریم که مرکزش بر خط AB و مماس داخلی بر دایره A و مماس خارجی بر دایره B است. فرض کنید C_1, C_2, \dots دایره‌هایی هستند که: C_1 مماس بر دایره A, B, C ; C_2 مماس بر دایره A, B, C_1 ; و به همین قیاس \dots در این صورت

$$h_n = 2nr_n$$



شکل ۱۰.۳

که در آن h_n فاصله مرکز C_n تا خط AB و r_n شعاع دایره C_n است.
برهان. فرض می‌کنیم T نقطه تماس دایره A و B ، مرکز انعکاس باشد (شعاع دایره انعکاس را دلخواه می‌گیریم). پس دو دایره A و B بر دو خط موازی و عمود بر خط AB نگاشته می‌شوند، و دایره C_0, C_1, C_2, \dots بر دایره C_0, C_1, C_2, \dots مماس بر این دو خط موازی (نگاره‌های دایره A و B) نگاشته می‌شوند، و شعاعهای C'_n همگی برابر (مثلاً با r') هستند. پس

$$\frac{r_n}{r'} = \frac{\overline{TC_n}}{\overline{TC'_n}} = \frac{h_n}{C'_n C'_n} = \frac{h_n}{2nr'} \quad \therefore h_n = 2nr_n$$

برهانهای بسیاری برای قضیه ۱.۸.۲، قضیه فویرباخ، با استفاده از انعکاس موجودند، ولی

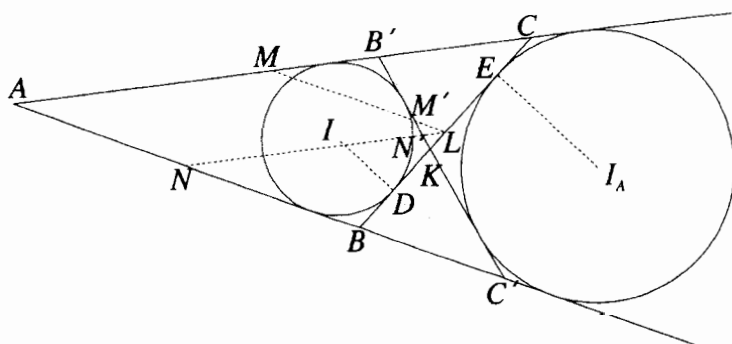
برهان زیر که در صفحات ۱۱۷-۱۱۹ کتاب «تجدید نظری در هندسه»^۱ تألیف ه. س. م. کاکستر و س. ل. گرایتسر آمده است، شاید مقدماتی‌ترین برهان شناخته شده باشد. ..

قضیه ۴.۸.۳. (فویرباخ). دایره نه نقطه مثلث بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی آن مماس است.

برهان. فرض می‌کنیم I و I_A به ترتیب مرکز دایره محاطی داخلی و مرکز دایره محاطی خارجی مقابل به زاویه A باشند. پس سه ضلع $\triangle ABC$ مماسهای مشترک دایره I و I_A هستند. فرض می‌کنیم $B'C'$ چهارمین مماس مشترک آنها باشد که B', C' به ترتیب بر AC و امتداد AB واقع هستند و E, D به ترتیب پایهای عمودهای مرسوم از I و I_A بر ضلع BC باشند. طول اضلاع مقابل به زوایای A, B, C را به ترتیب، a, b, c می‌گیریم. و قرار می‌دهیم $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. در این صورت به آسانی می‌توان تحقیق کرد که:

$$\overline{BD} = s - b = \overline{CE}$$

پس نقطه L ، وسط ضلع BC ، وسط DE نیز هست. بنابراین، دایره به قطر DE بر هر دو دایره محاطی داخلی I و محاطی خارجی I_A عمود است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که منعکسهای دایره‌های I و I_A نسبت به دایره L خود دایره‌های I و I_A هستند. چون دو دایره فقط و فقط وقتی بر هم مماس‌اند که منعکسهای آنها هم بر هم مماس باشند، کافی است نشان دهیم که منعکس دایره نه نقطه خط $B'C'$ است.



شکل ۱۱.۳

چون دایره نه نقطه از مرکز انعکاس L می‌گذرد، بر یک خط نگاشته می‌شود. به علاوه، دایره نه نقطه از نقاط N, M ، وسطهای AB, CA ، می‌گذرد، لذا می‌ماند نشان دهیم که منعکسهای

1. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer's *Geometry Revisited* [Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967, pp. 117-119].

M و N (نسبت به دایره L) بر خط $B'C'$ قرار دارند.

فرض کنید K, M', N' به ترتیب محل تلاقی $B'C'$ با BC, LM, LN باشند. چون BI نیمساز $\angle KBA$ ، و CI_A نیمساز زاویه خارجی $\angle KCA$ هستند، بنابر لم پ.۱.۴، داریم

$$\overline{BK} : \overline{AB} = \overline{KI} : \overline{AI} = \overline{CK} : \overline{AC};$$

یعنی

$$\frac{\overline{BK}}{c} = \frac{\overline{CK}}{b} = \frac{a}{b+c} \quad \therefore \overline{BK} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{CK} = \frac{ab}{b+c}$$

چون L وسط BC است، نتیجه می‌گیریم که

$$\overline{LK} = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

اگر $c < b$ ، آنگاه فقط نقشهای B و C (و بنابراین نقشهای b و c) با هم عوض می‌شوند، ولی اگر $c = b$ ، قضیه بدیهی است، از این رو بدون اینکه از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد که $c > b$. چون $\triangle KLM' \sim \triangle KBC'$ ، داریم:

$$\overline{LM'} : \overline{LK} = \overline{BC'} : \overline{BK};$$

یعنی

$$\overline{LM'} = \frac{(b-c)^2}{2c}$$

که در آن از:

$$\overline{BC'} = \overline{AC'} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AB} = b - c$$

$$\therefore \overline{LM} \cdot \overline{LM'} = \left(\frac{b-c}{2} \right)^2$$

استفاده شده است. همین‌طور از $\triangle KLN' \sim \triangle KCB'$ نتیجه می‌گیریم:

$$\overline{LN'} = \frac{(b-c)^2}{2b} \quad \therefore \overline{LN} \cdot \overline{LN'} = \left(\frac{b-c}{2} \right)^2$$

$$\overline{LD} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}(b-c)$$



و کار تمام است.

پیش از ارائه برهان دیگری برای قضیهٔ بطلیموس - اویلر ۱.۲.۲، به فرمولی نیاز داریم که اثر انعکاس را بر طول بیان کند.

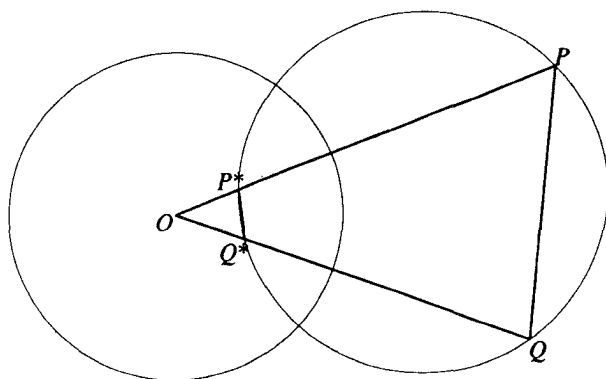
لم ۵.۸.۳. فرض کنید P^* و Q^* منعکسهای دو نقطهٔ P و Q نسبت به دایره‌ای به مرکز O و شعاع r باشند. در این صورت

$$\overline{P^*Q^*} = \frac{r^2 \cdot \overline{PQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \quad \text{و} \quad \overline{PQ} = \frac{r^2 \cdot \overline{P^*Q^*}}{\overline{OP^*} \cdot \overline{OQ^*}}$$

برهان. چون $\triangle OP^*Q^* \sim \triangle OQP$ داریم

$$\frac{\overline{P^*Q^*}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OP^*}}{\overline{OQ}} = \frac{r^2}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}, \quad \therefore \overline{P^*Q^*} = \frac{r^2 \cdot \overline{PQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}$$

تساوی دوم بلافاصله از اولی نتیجه می‌شود، زیرا P, Q به ترتیب منعکسهای P^*, Q^* هستند. ■



شکل ۱۲.۳

قضیهٔ ۶.۸.۳. (بطلیموس - اویلر). به ازای چهار نقطهٔ دلخواه A, B, C, D داریم:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

تساوی فقط و فقط هنگامی برقرار است که D, C, B, A همدایره و به همین ترتیب باشند.

برهان. انعکاسی را در نظر بگیرید که D مرکز آن باشد. پس بنابر ناهمبازی مثلثی، داریم

$$\overline{A^*B^*} + \overline{B^*C^*} \geq \overline{A^*C^*}$$

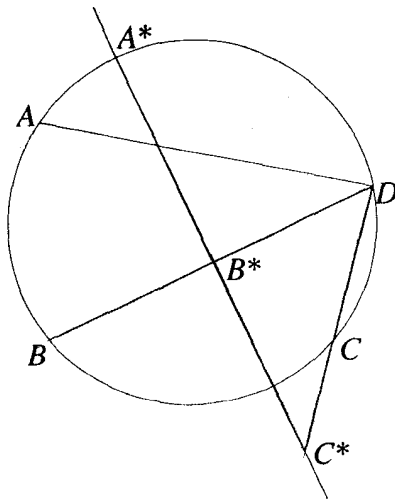
و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار خواهد شد که A^*, B^*, C^* همخط و به همین ترتیب باشند. بنابر لم قبل، این رابطه بر حسب D, C, B, A چنین خواهد شد:

$$\frac{r^2 \cdot \overline{AB}}{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} + \frac{r^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{BD} \cdot \overline{CD}} \geq \frac{r^2 \cdot \overline{AC}}{\overline{AD} \cdot \overline{CD}};$$

یعنی

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

تساوی فقط و فقط زمانی برقرار خواهد شد که D, C, B, A همدایره و به همین ترتیب باشند. ■



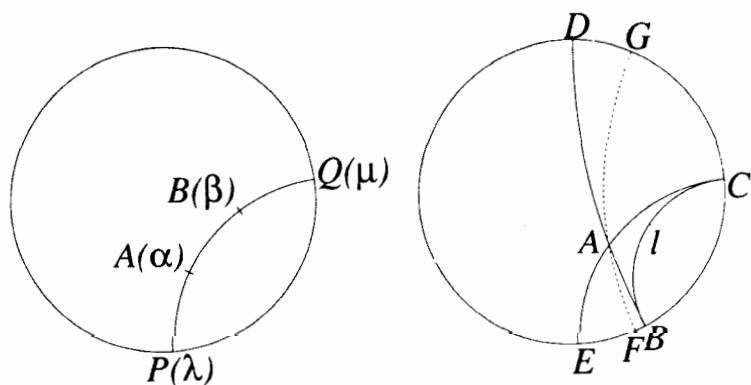
شکل ۱۳.۳

۹.۳ الگوی پوانکاره برای هندسهٔ ناقلیدسی

یکی از اصول موضوع هندسه اقلیدسی این است که از یک نقطه واقع در خارج یک خط فقط و فقط یک خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد. (این، صورت اصلی بیان اقلیدس نیست ولی، هم‌ارز با آن است). چون اصل موضوع توازی همانند سایر اصول کاملاً بدیهی نیست، قرن‌ها تلاش می‌کردند که این اصل موضوع توازی را از روی سایر اصول موضوع اثبات کنند. این کار تا قرن اخیر ادامه داشت تا اینکه ی. بویوی (۱۸۰۲-۱۸۶۰) و ن. ای. لباچفسکی (۱۷۹۳-۱۸۵۶) با ساختن هندسه‌ای که در آن اصل توازی برقرار نبود، به این تلاش خاتمه دادند. برای ابطال اصل موضوع توازی دو راه وجود دارد. یکی ساختن هندسه‌ای است که در آن هیچ خط موازی وجود نداشته باشد، یعنی هر دو خطی متقاطع باشند. یک الگو برای ساختن چنین هندسه‌ای بررسی سطح کره است، که در آن «خطوط» دایره‌های عظیمه‌اند. (برای اینکه دقیق سخن بگوییم، باید دو نقطه متقاطع را یکی بگیریم. چرا؟). راه دیگر ساختن هندسه‌ای است که در آن از یک نقطه بیش از یک خط موازی با خط مفروض بتوان رسم کرد. اکنون با پیروی از ه. پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲) چنین الگویی را معرفی می‌کنیم:

جهان ما، یا بہتر بگوئیم «صفحہ» ما یک قرص (باز) دائرہ یکہ است:

$$U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$



شكل ١٤.٣

و «خطوط مستقیم» قوسهای دایره‌ای عمود بر این دایره‌ایک‌ه‌اند. می‌توان تحقیق کرد که این الگوی ما در همهٔ اصول هندسهٔ اقلیدس بجز اصل توازی صدق می‌کند. مثلاً از دو نقطهٔ مفروض A و B در U فقط و فقط یک «خط مستقیم» وجود دارد که از A و B می‌گذرد. کافی است

دایره‌ای رسم کنیم که از نقاط A , B و A^* ، منعکس نقطه A نسبت به دایره یکه، بگذرد. (این دایره خودبه‌خود از نقطه B^* ، منعکس B ، نیز خواهد گذشت). اثنا با داشتن یک «خط مستقیم» مفروض ($\widehat{BC} = \ell$) و یک نقطه A غیر واقع بر ℓ ، می‌توانیم «خطوط مستقیم» \widehat{BAD} و \widehat{CAE} را رسم کنیم که ℓ را روی دایره یکه قطع کنند. چون نقاط واقع بر دایره یکه در «صفحه» U ما نیستند، «خطوط مستقیم» \widehat{BAD} و \widehat{CAE} موازی با این «خط مستقیم» ℓ هستند و بینهایت «خط مستقیم» مانند \widehat{FAG} در فاصله میان این دو خط وجود دارند که اصلاً ℓ را قطع نمی‌کنند. «فاصله» بین دو نقطه $z_1, z_2 \in U$ چنین تعریف می‌شود:

$$d(z_1, z_2) := |\log(z_1, z_2; \lambda, \mu)|$$

که در آن λ, μ فصل مشترکهای قوس دایره مارّ بر z_1, z_2 و دایره یکه هستند. باید توجه داشت که تابع فاصله $d(z_1, z_2)$ خوشتعریف است: چون z_1, z_2, λ, μ هم‌دایره‌اند، نسبت ناهمسازشان عددی است حقیقی و چون z_1, z_2 هر دو بین λ و μ قرار دارند، این نسبت ناهمساز مثبت است. به‌علاوه $d(z_1, z_2)$ مستقل از ترتیب انتخاب λ و μ است. زیرا

$$\begin{aligned} (z_1, z_2; \mu, \lambda) &= \frac{1}{(z_1, z_2; \lambda, \mu)}, \\ |\log(z_1, z_2; \mu, \lambda)| &= |-\log(z_1, z_2; \lambda, \mu)| \\ &= |\log(z_1, z_2; \lambda, \mu)| \end{aligned}$$

بالآخره انتخاب پایه برای لگاریتم مهم نیست، و فقط، هم‌ارز با تغییر مقیاس است. می‌توان نشان داد که تابع فاصله ما در اصول موضوع متریک زیر صدق می‌کند.
الف) به‌ازای همه مقادیر $z_1, z_2 \in U$ ، $d(z_1, z_2) \geq 0$. تساوی فقط و فقط هنگامی برقرار است که $z_1 = z_2$.

ب) به‌ازای همه مقادیر $z_1, z_2 \in U$ ، $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
ج) نابرابری مثلثی: به‌ازای هر سه نقطه

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3) \quad z_1, z_2, z_3 \in U$$

تحقیق درستی دو اصل موضوع اوّل در واقع یک کار عملی ساده است.
مفهوم زاویه در «صفحه» U ، همان مفهوم زاویه معمولی در هندسه اقلیدسی بین یک جفت دایره متقاطع است. اثنا مجموع زوایای (داخلی) یک «مثلث» کمتر از π است.
در هندسه اقلیدسی ویژگیهایی را مطالعه می‌کنیم که در اثر حرکت جسم صلب ناوردا

هستند - گروه تبدیلیهای متشکل از انتقال، دوران و تقارن. همتای این تبدیلیها در الگوی پوانکاره عبارت‌اند از گروه (!) همه تبدیلیهای موبیوس که قرص یکه را بر خودش می‌نگارند. چون تبدیلیهای موبیوس هم‌دیس و حافظ نسبت ناهمساز هستند، فاصله بین دو نقطه و زاویه بین دو «خط مستقیم» بر اثر حرکت صلب، محفوظ می‌مانند.

تمرینها

۱. فرض کنید z_1, z_2 نقاطی در صفحه مختلط باشند که نگاره‌های گنجگاشتی آنها بر کره ریمان، نقاط متقابل این کره باشند. نشان دهید $z_1 \bar{z}_2 = -1$.
۲. نشان دهید که به ازای مقدار مناسب k ($0 < k < 1$)، هر چهار نقطه متمایز هم‌دایره را می‌توان با یک تبدیل موبیوس به نقاط ± 1 و $\pm k$ نگاشت.
۳. نشان دهید که شش تبدیل موبیوس زیر بر اثر ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهند:

$$z, \frac{1}{z}, 1-z, \frac{1}{1-z}, \frac{z}{z-1}, \frac{z-1}{z}$$

۴. نشان دهید که نسبت ناهمساز متناظر با ۲۴ جایگشت چهار نقطه z_0, z_1, z_2, z_3 فقط می‌تواند شش مقدار زیر را داشته باشد:

$$\lambda = (z_0, z_1; z_2, z_3), \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

۵. دو دایره به مرکزهای مبدأ مختصات و نقطه ۱، هر دو به شعاع ۱ به انضمام خط $\Re z = \frac{1}{2}$ ، صفحه مختلط \mathbb{C} را به شش ناحیه تقسیم می‌کنند. نشان دهید که هریک از این شش ناحیه دقیقاً شامل یکی از شش مقدار:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

هستند، به شرط آنکه λ روی هیچ‌یک از مرزها نباشد.

۶. تابع غیر ثابت $f(z)$ را چنان بیابید که در معادله تابعی زیر صدق کند

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{1}{z}\right) = f(1-z) = f\left(\frac{1}{1-z}\right) \\ &= f\left(\frac{z}{z-1}\right) = f\left(\frac{z-1}{z}\right) \quad (z \neq 0, 1) \end{aligned}$$

چند تا از این توابع وجود دارند؟

۷. یک تابع $f(z)$ پیدا کنید که به ازای همه مقادیر $(z \neq 0, 1)$ در معادله تابعی:

$$f\left(\frac{1}{1-z}\right) + f\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{z}{z-1}$$

صدق کند. آیا چنین تابعی یکتاست؟

۸. نقطه z_0 را نقطه ثابت یک تبدیل T گویند، اگر $Tz_0 = z_0$.

الف) نشان دهید که تبدیل موبیوسی که نقاط ثابت آن $0, 1, \infty$ باشند، باید تبدیل همانی باشد.

ب) نشان دهید، تبدیل موبیوسی که سه نقطه ثابت متمایز داشته باشد، باید تبدیل همانی باشد.
ج) فرض کنید تبدیلیهای موبیوس T و S این ویژگی را داشته باشند که به ازای سه نقطه متمایز z_i ($i = 1, 2, 3$)، $Sz_i = Tz_i$ ، نشان دهید که $S = T$.

۹. تبدیل موبیوسی پیدا کنید که $1, 0, -1$ را به $i, -i, 1$ بنگارد.

۱۰. از راه محاسبه، ناوردا بودن نسبت ناهمساز را بر اثر انتقال، اتساع و عکس کردن تحقیق کنید.
۱۱. با استفاده از این ویژگی که تبدیل موبیوس نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند، نشان دهید که تبدیل موبیوس دایره را بر دایره می‌نگارد.

۱۲. دو دایره متقاطع مفروض‌اند. خط‌المرکزین آنها دو دایره را در چهار نقطه قطع می‌کند. نشان دهید که نسبت ناهمساز این چهار نقطه برابر $\frac{\theta}{4} \sin^2$ است که θ زاویه تقاطع دو دایره است.

۱۳. الف) نقطه P خارج دایره C داده شده است. با استفاده از ستاره و پرگار، نقطه Q قرینه نقطه P را نسبت به دایره C پیدا کنید.

ب) اگر نقطه P درون دایره C باشد چه خواهد شد؟

ج) نقطه P و دو دایره C_1 و C_2 داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر هر دو دایره C_1 و C_2 عمود باشند.

د) دو دایره نامتقاطع داده شده‌اند. دو نقطه پیدا کنید که نسبت به هر دو دایره متقارن باشند.

۱۴. الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقاط z_0 و z^* نسبت به دایره $|z-a|=r$ قرینه باشند، این است که

$$(\bar{z}_0 - \bar{a})(z^* - a) = r^2$$

ب) نشان دهید که z_0 و z^* فقط و فقط هنگامی نسبت به دایره محیطی $z_1 z_2 z_3 \Delta$ متقارن‌اند که:

$$(z^*, z_1; z_2, z_3) = \overline{(z_0, z_1; z_2, z_3)}$$

ج) با استفاده از (ب)، اصل تقارن ۲.۴.۳ را ثابت کنید.

۱۵. الف) اگر z و z^* نسبت به یک دایره C متقارن باشند، و z_1 و z_2 دو نقطه دلخواه بر دایره C باشند، نشان دهید که قدر مطلق نسبت ناهمساز $(z_1, z_2; z^*, z)$ برابر ۱ است.
 ب) سه نقطه z_1, z_2, z_3 داده شده‌اند. مجموعه همه z هایی را که در تساوی:

$$|(z_0, z_1; z_2, z_3)| = 1$$

صدق می‌کنند پیدا کنید.

۱۶. الف) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که محور حقیقی را بر خودش بنگارد می‌تواند با ضرایب حقیقی بیان شود.
 ب) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که محور حقیقی صفحه z را بر دایره یگه صفحه w بنگارد می‌تواند به صورت

$$w = \frac{\alpha z - \beta}{\bar{\alpha} z - \bar{\beta}} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbb{R} \right)$$

بیان شود.

ج) نشان دهید که هر تبدیل موبیوسی که دایره یگه را بر خودش بنگارد می‌تواند به صورت

$$w = \frac{\alpha z - \beta}{\bar{\beta} z - \bar{\alpha}} \quad (|\alpha| \neq |\beta|)$$

بیان شود.

۱۷. الف) تبدیل موبیوسی بیابید که دایره $|z| = 1$ و $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ را بر یک جفت دایره هم‌مرکز بنگارد. نسبت شعاعهای این دو دایره هم‌مرکز چیست؟

ب) همین مسأله را برای دایره $|z| = 1$ و $|z + 2| = 4$ حل کنید.

۱۸. تبدیل موبیوسی پیدا کنید که محور حقیقی و دایره $|z - 5i| = 4$ را به دو دایره هم‌مرکز به مرکز مبدأ بنگارد. نسبت شعاعهای آنها چیست؟

۱۹. فرض کنید تبدیل موبیوسی یک جفت دایره هم‌مرکز را بر یک جفت دایره هم‌مرکز دیگر بنگارد. نشان دهید که نسبت شعاعهای آنها محفوظ می‌ماند.

۲۰. الف) تبدیل موبیوسی پیدا کنید که دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - 2| = 2$ را بر دو دایره $|w - 1| = 1$ و $|w + 1| = 1$ بنگارد.

ب) تبدیل موبیوسی بیابید که دو دایره $|z| = 1$ و $|z - \sqrt{3}| = 2$ را بر دو دایره $|w - 1| = 2$ و $|w + 1| = 2$ بنگارد.

ج) تبدیل موبیوسی پیدا کنید که دو دایره $|z| = 1$ و $|z - 5| = 3$ را بر دو دایره هم‌مرکز بنگارد.

۲۱. نقاط ثابت تبدیلهای موبیوس زیر را بیابید:

$$(الف) w = \frac{z}{z-1}$$

$$(ب) w = \frac{z-4}{z-3}$$

$$(ج) w = \frac{z}{2-z}$$

$$(د) w = \frac{5z-4}{2z-1}$$

کدام یک از این تبدیلهای بیضوی؟ هذلولوی؟ سهموی؟ ثابت - زاویه هستند؟

۲۲. الف) همه تبدیلهای موبیوس T را بیابید که T^2 همانی باشد.

ب) نشان دهید که T^n همانی است اگر و فقط اگر، T شکل نرمال

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k \frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad (k^n = 1)$$

را داشته باشد.

۲۳. الف) آیا تقارن $w = Tz = \bar{z}$ ، نسبت به محور حقیقی، یک تبدیل موبیوس است؟

ب) در مورد انعکاس نسبت به دایره یک چطور؟

۲۴. نگاره‌های خطوط و دوائر زیر را بر اثر انعکاس نسبت به دایره یک بیابید.

الف) خط $y = x$

ب) خط $x = 1$

ج) دایره $|z-2|=1$

د) دایره $|z-2|=2$

۲۵. آیا انعکاس، حافظ تقارن است؟

۲۶. آیا ترکیب دو انعکاس، یک انعکاس است؟ آیا این ترکیب یک تبدیل موبیوس است؟

۲۷. خط ℓ و دایره C به مرکز A داده شده‌اند. فرض کنید B قرینه A نسبت به خط ℓ و B^*

منعکس B نسبت به دایره C باشند. نشان دهید که B^* مرکز دایره منعکس خط ℓ نسبت به دایره C است.

۲۸. الف) خط و دایره‌ای داده شده‌اند. نشان دهید که انعکاسی وجود دارد که یکی را بر دیگری بنگارد.

ب) همان مسأله را برای دو دایره (به جای یک خط و یک دایره) حل کنید.

۲۹. دو دایره C_1 و C_2 که یکدیگر را قطع نمی‌کنند داده شده‌اند. نشان دهید که انعکاسی وجود

دارد که C_1 و C_2 را بر دو دایره هم‌مرکز می‌نگارد.

۳۰. آیا تبدیل موبیوسی وجود دارد که قرص دایره یک را بر خودش بنگارد و دو نقطه مفروض از قرص یک را با هم تعویض نماید؟ اگر جواب مثبت است چند تا از این تبدیلهای موبیوس وجود دارند؟

۳۱. در الگوی پوانکاره خطوط ℓ_1 و ℓ_2 را با هم موازی بگیرید، و خطوط ℓ_2 و ℓ_3 را با هم موازی کنید. آیا لازم است که ℓ_1 و ℓ_3 با هم موازی باشند؟

۳۲. نشان دهید که در الگوی پوانکاره تابع فاصله $d(z_1, z_2)$ ، هنگامی که z_2 به سمت نقطه‌ای واقع بر دایره یک میل کند، به ∞ میل خواهد کرد.

۳۳. فرض کنید نقاط z_1, z_2, z_3 با همین ترتیب بر یک خط مستقیم قرار دارند. نشان دهید که

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3)$$

۳۴. فرض کنید w_1, w_2, z_1, z_2 نقاطی در صفحه پوانکاره باشند. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی $d(z_1, z_2) = d(w_1, w_2)$ این است که تبدیل موبیوسی وجود داشته باشد که قرص یک را بر خودش بنگارد به طوری که $Tz_j = w_j$ ($j = 1, 2$). راهنمایی: ابتدا تبدیل موبیوسی را پیدا کنید که z_2 و w_2 را بر مبدأ بنگارد.

۳۵. نابرابری مثلثی:

$$d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3) \quad (z_1, z_2, z_3 \in U)$$

را برای الگوی پوانکاره ثابت کنید.

راهنمایی: از تبدیل موبیوسی استفاده کنید که نقطه z_2 را بر مبدأ بنگارد.

۳۶. در الگوی پوانکاره دایره را توصیف کنید.

۳۷. «خط مستقیم» ℓ در الگوی پوانکاره داده شده است. مکان هندسی نقاطی مانند z که فاصله‌های آنها از این «خط مستقیم» مفروض ℓ مقدار ثابتی باشد چیست؟

۳۸. نشان دهید که مجموعه همه تبدیلهای موبیوس که قرص یک را بر خودش می‌نگارند، یک گروه تشکیل می‌دهند.

سخن آخر

امیدوارم توفیق یافته باشم که نشان دهم اعداد مختلط مفیدند، و می‌توانند برای ارائهٔ برهانهای ساده در بسیاری از قضایای زیبای هندسهٔ مسطحه به‌کار روند.

از آنجا که این موضوع قدمت زیادی دارد، به دشواری می‌توان مدّعی تازگی قضیه‌ای شد، ولی تا آنجا که من اطلاع دارم، به‌نظر نمی‌رسد برهانهای قضایای ۱.۵.۲، ۱.۶.۲، ۳.۶.۲ و ۱.۹.۲ و صورتهای مختلف آنها (به‌گونه‌ای که من در اینجا آورده‌ام) و همچنین قضیهٔ ۲.۶.۲ تاکنون در جایی منتشر شده باشد. اقلّاً می‌توانم، به قول کاتس‌نلسن، سوگند یاد کنم که این براهین از آن خود من هستند. بدیهی است که بسیاری از مسائل تمرینها نیز ابتکارهای خودم، و به‌خصوص تمرینهای ۸ و ۱۶ (ب) فصل ۲ سخت مورد علاقه‌ام هستند.

در نوشتن فصل ۱ به کتاب هندسهٔ اعداد مختلط، تألیف ک. کاتایاما^۱ (به زبان ژاپنی) و برای فصل ۲ به کتاب قضایای مشهور هندسه، اثر ک. یانو^۲ (به زبان ژاپنی) کراراً مراجعه کرده‌ام. در واقع، کتاب اخیر الهام‌بخش من در تنظیم دروس خود دربارهٔ اعداد مختلط بوده است، و عمیقاً مدیون این دو مؤلف هستم. بالاخره برای خواندگانی که علاقه‌مند به ادامهٔ بیشتر این موضوع هستند کتاب ه. شورتفگر هندسه و اعداد مختلط^۳ را زیاد توصیه می‌کنم.

1. K. Katayama, *Geometry of Complex Numbers*, Iwanami, Tokyo, 1982.

2. K. Yano, *Famous Theorems in Geometry*, Kyoritsu, Tokyo, 1981.

3. H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Dover, New York, 1979.

پیوست الف

مقدماتی از هندسه

الف ۱. مرکزهای مثلث

الف ۱.۱. مرکزوار

لم الف ۱.۱. فرض کنید D و E وسطهای اضلاع AB و AC از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت:

$$DE \parallel BC \quad \text{و} \quad \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

برهان. DE را تا نقطه F امتداد می‌دهیم، به طوری که $\overline{DE} = \overline{EF}$. بنابراین در $\triangle ADE$ و $\triangle CFE$

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{CE}, & \overline{DE} &= \overline{FE}, & \angle AED &= \angle CEF \\ \therefore \triangle ADE &\cong \triangle CFE \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

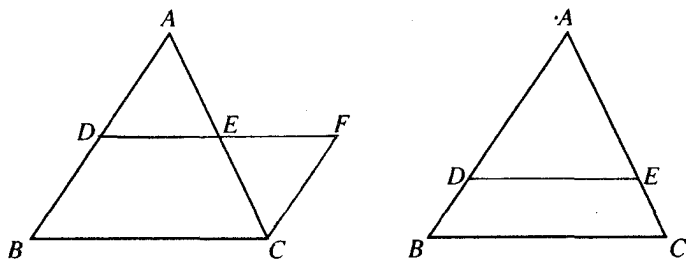
$$\overline{CF} = \overline{AD} = \overline{DB}$$

و

$$\angle CFE = \angle ADE. \quad \therefore CF \parallel BD$$

از این رو چهارضلعی $BCFD$ یک متوازی الاضلاع است.

$$\therefore \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{DF} = \frac{1}{2} \overline{BC} \quad \text{و} \quad DE \parallel BC$$



شکل الف ۱.

در واقع این لم حالت خاصی از قضیه زیر است:

قضیه الف ۱.۲. فرض کنید D و E نقاطی بر اضلاع AB و AC از $\triangle ABC$ باشد به طوری که $DE \parallel BC$. در این صورت:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

عکس آن نیز درست است.

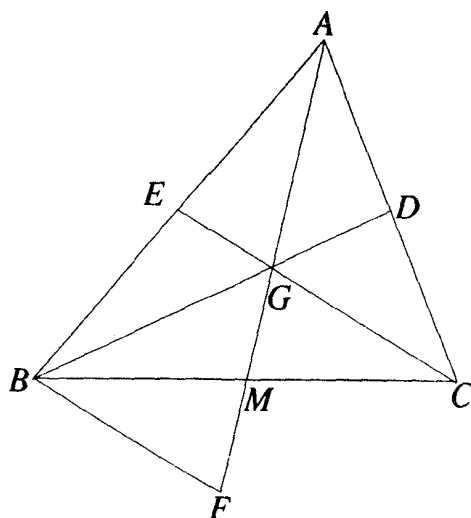
برهان. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

قضیه الف ۱.۳. سه میانه مثلث در یک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز ثقل گویند.

برهان. فرض کنید G نقطه تلاقی میانه BD و CE از $\triangle ABC$ باشد. AG را (ابتدا از G) تا نقطه F امتداد می‌دهیم به طوری که $\overline{GF} = \overline{AG}$. در این صورت E و G در $\triangle ABF$ به ترتیب وسطهای اضلاع AB و AF هستند. بنابراین به موجب لم پیش

$$BF \parallel EG \parallel GC$$

همین طور $CF \parallel GB$. بنابراین چهارضلعی $BFCG$ متوازی الاضلاع است، و از آنجا دو قطر در نقطه‌ای مثل M یکدیگر را نصف می‌کنند. پس نشان دادیم که امتداد AG از نقطه M وسط



شکل الف ۲.

ضلع BC می‌گذرد، یعنی سه میانه مثلث در یک نقطه متقاطع‌اند.
باید توجه داشت که از برهان ما نتیجه می‌شود که:

$$\overline{AG} = \overline{GF} = 2\overline{GM}, \quad \overline{CG} = \overline{FB} = 2\overline{GE}$$

و همین‌طور

$$\overline{BG} = 2\overline{GD}$$

الف ۲.۱. مرکز دایره محیطی

لم الف ۴.۱. فرض کنید A و B دو نقطه ثابت باشند. نقطه‌ای مانند P فقط و فقط وقتی بر عمود منصف پاره خط AB قرار دارد که $\overline{PA} = \overline{PB}$.
برهان. فرض کنید P بر عمود منصف پاره خط AB واقع باشد. نقطه P را به نقطه M وسط AB وصل می‌کنیم، پس

$$\triangle PAM \cong \triangle PBM \quad (\text{با دو ضلع و زاویه بین})$$

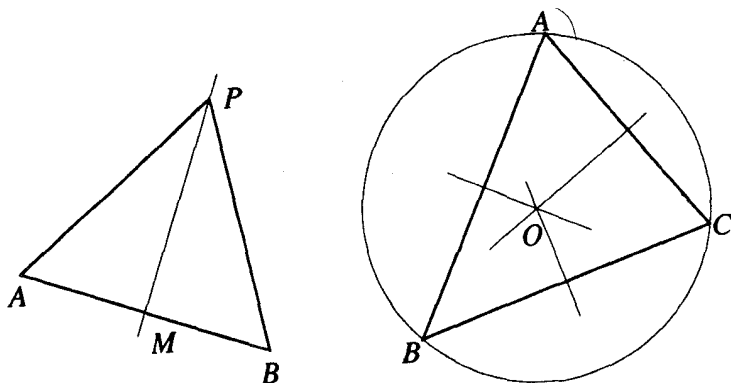
و لذا $\overline{PA} = \overline{PB}$

به عکس، اگر $\overline{PA} = \overline{PB}$ ، آنگاه:

$$\triangle PAM \cong \triangle PBM \quad (\text{با سه ضلع})$$

که در آن M وسط پاره خط AB است از این رو:

$$\angle AMP = \angle BMP = \frac{\pi}{2}$$



شکل الف ۳.

قضیه الف ۵.۱. سه عمود منصف اضلاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه می‌برند. این نقطه را مرکز دایره محیطی مثلث گویند.

برهان. فرض کنید O نقطه تلاقی عمود منصفهای اضلاع AB و AC باشد. پس، چون نقطه O بر عمود منصف AB قرار دارد، بنابر قسمت اول لم قبل، داریم $\overline{AO} = \overline{BO}$. همچنین، چون O بر عمود منصف AC قرار دارد، داریم $\overline{AO} = \overline{CO}$. پس $\overline{BO} = \overline{CO}$ ، و لذا بنابر نیمه دوم لم، نقطه O بر عمود منصف ضلع BC قرار خواهد داشت. ■

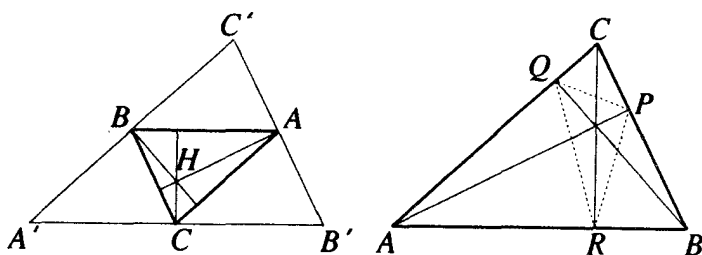
باید توجه کرد، که چون فاصله‌های O تا سه رأس مثلث برابرند، اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع \overline{OA} رسم کنیم دایره محیطی $\triangle ABC$ به دست می‌آید.

الف ۳.۱. مرکز ارتفاعها

قضیه الف ۶.۱. سه عمود مرسوم از رأسهای یک مثلث بر اضلاع مقابل آن در یک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز ارتفاعهای مثلث گویند.

برهان. از هریک از رأسهای $\triangle ABC$ خطی موازی ضلع مقابل می‌کشیم تا $\triangle A'B'C'$ به دست آید. در این صورت چهار ضلعیهای $ACB'C'$ ، $ABCB'$ ، $ACBC'$ متوازی الاضلاع هستند، و بنابراین

$\overline{AB'} = \overline{BC} = \overline{C'A}$ چون $B'C' \parallel BC$ ، عمود وارد از رأس A بر ضلع BC عمود منصف پاره خط $B'C'$ خواهد شد. به عبارت دیگر، سه عمود وارد از رأسهای $\triangle ABC$ بر اضلاع مقابل، عمود منصفهای $\triangle A'B'C'$ هستند. از این رو بنابر قضیه قبل، این سه خط متقارباند. ■



شکل الف ۴.

برهان دیگر. فرض کنید P و Q و R به ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A و B و C بر اضلاع مقابل BC و CA و AB از $\triangle ABC$ باشند. ملاحظه می‌کنیم که

$$\angle BQC = \angle BRC (= \frac{\pi}{2})$$

و از آنجا به موجب فرع الف ۲.۲ در ذیل، B و R و Q و C هم‌دایره‌اند. همچنین C و P و R و A هم‌دایره‌اند و A و Q و P و B هم همین‌طورند. از این رو بنابر لم الف ۱.۲ در ذیل، داریم:

$$\angle APQ = \angle ABQ = \angle QCR = \angle APR$$

همچنین

$$\angle CRP = \angle CRQ, \quad \angle BQR = \angle BQP$$

پس نشان دادیم که سه ارتفاع $\triangle ABC$ ، سه نیمساز مثلث پادک PQR هستند. لذا، بنابر قضیه الف ۸.۱ در ذیل، در مرکز دایره محاطی داخلی $\triangle PQR$ همدیگر را تلاقی می‌کنند. ■

الف ۴.۱. مرکز دایره محاطی داخلی و سه مرکز دایره محاطی خارجی
 لم الف ۷.۱. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در داخل $\angle BAC$ باشد. در این صورت P بر نیمساز $\angle BAC$ واقع است اگر و فقط اگر، فاصله‌های نقطه P از دو ضلع AB و AC برابر باشند.

برهان. فرض کنید P نقطه دلخواهی بر نیمساز $\angle BAC$ باشد و E, D به ترتیب پاهای عمودهای وارد از P بر AB و AC باشند. پس در $\triangle APD$ و $\triangle APE$ دو زوج زاویه متناظر برابرند و لذا این دو مثلث متشابه‌اند. به علاوه هر دو در ضلع AP مشترک‌اند. پس:

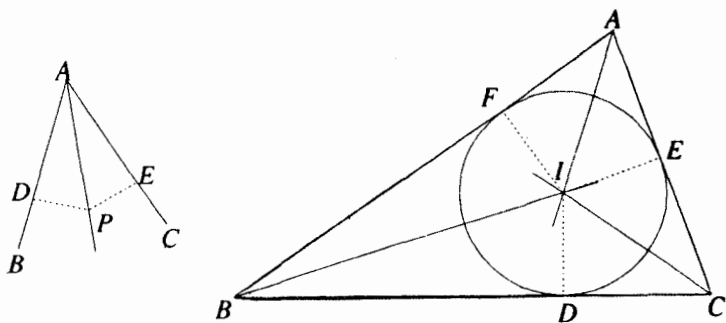
$$\triangle APD \cong \triangle APE \quad \therefore \overline{PD} = \overline{PE}$$

به عکس فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در داخل $\angle BAC$ باشد چنان‌که $\overline{PD} = \overline{PE}$ که E و D به ترتیب پاهای عمودهای وارد از P بر AB و AC هستند. پس بنابر قضیه فیثاغورس سه زوج اضلاع متناظر $\triangle APD$ و $\triangle APE$ باهم برابرند و لذا:

$$\triangle APD \cong \triangle APE \quad \therefore \angle PAD = \angle PAE$$

■ قضیه الف ۸.۱. سه نیمساز (داخلی) زوایای مثلث در یک نقطه هم‌دیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز دایره محاطی داخلی (درون-مرکز) مثلث گویند.

برهان. فرض کنید I فصل مشترک نیمسازهای زوایای B و C از $\triangle ABC$ باشند، و F, E, D را به ترتیب پاهای عمودهای وارد از I بر سه ضلع AB, CA, BC می‌گیریم. پس چون I بر نیمساز $\angle ABC$ واقع است، بنابر قسمت اول لم فوق، داریم $\overline{IF} = \overline{ID}$. همچنین، چون I بر



شکل الف ۵.

نیمساز $\angle ACB$ نیز قرار دارد، داریم $\overline{ID} = \overline{IE}$ و در نتیجه $\overline{IE} = \overline{IF}$. \therefore بنابراین با توجه به قسمت اول لم، I باید بر نیمساز $\angle BAC$ نیز باشد.

■ چون فاصله‌های مرکز دایره محاطی داخلی از سه ضلع مثلث برابرند، اگر دایره‌ای به مرکز I و به شعاع فاصله I از یک ضلع رسم کنیم، دایره‌ای مماس بر سه ضلع مثلث به دست می‌آید. این دایره را دایره محاطی داخلی مثلث گویند.

قضیه الف ۹.۱. در هر مثلث نیمسازهای خارجی دو رأس و نیمساز داخلی رأس دیگر در یک نقطه همدیگر را می‌برند. این نقطه را مرکز دایره محاطی خارجی (برون-مرکز) مثلث گویند، و این نقطه، مرکز دایره‌ای است بر ضلع سوم و امتدادهای دو ضلع دیگر مثلث مماس است. هر مثلث سه مرکز دایره محاطی خارجی و سه دایره محاطی خارجی دارد (شکل الف. ۶ را ببینید).

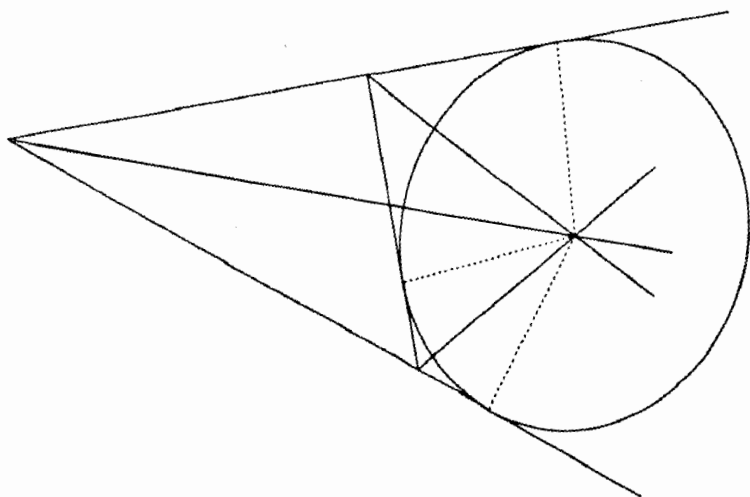
برهان. برهان اساساً همان برهان برای مرکز دایره محاطی داخلی (و دایره محاطی داخلی) است.

الف ۵.۱. قضیه‌های سوا و منلائوس

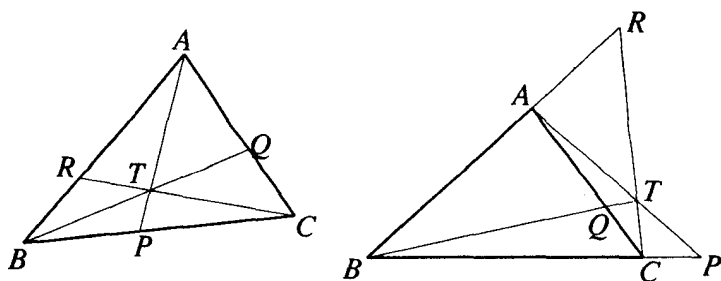
هر یک از نقاط مرکزوار، مرکز ارتفاعها، مرکز دایره محاطی داخلی و مراکز دایره‌های محاطی خارجی فصل مشترک سه خط هستند که از رأسهای مثلث می‌گذرند. برای این‌گونه مسائل قضیه گ. سوا (۱۶۴۷ - ۱۷۳۴)، در زیر بسیار کارآمد است.

قضیه الف ۱۰.۱. فرض کنید P, Q, R نقاطی به ترتیب بر اضلاع (یا امتدادهای) BC, CA, AB از $\triangle ABC$ باشند. در این صورت خطوط AP, BQ, CR متقاربانند اگر و فقط اگر:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$



شکل الف. ۶



شکل الف ۷.

به عنوان مثال، برای اینکه ثابت کنیم سه میانه مثلث متقارن اند با استفاده از نماد قبلی، داریم:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 1$$

و لذا شرط قضیهٔ سوا به روشنی برقرار است.

در مورد سه ارتفاع، فرض کنید

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{CA}, \quad c = \overline{AB}, \quad \alpha = \angle A, \quad \beta = \angle B, \quad \gamma = \angle C,$$

و R, Q, P را به ترتیب پاهای عمودهای وارد از رأسهای A, B, C بر اضلاع مقابل می‌گیریم. پس $\overline{BP} = c \cos \beta$ و بنابرین

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RA}} = \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} \cdot \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} = 1$$

قضیه اثبات شده است.

برای اثبات اینکه سه نیمساز زوایا متقارن اند U, V, W را به ترتیب فصل مشترکهای نیمسازهای رؤس A, B, C با اضلاع مقابل می‌گیریم. پس بنابر لم الف ۱.۴ برای دایرهٔ آپولونیوس در ذیل داریم

$$\frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} = \frac{b}{c}$$

و غیره

$$\therefore \frac{\overline{BU}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{CV}}{\overline{VA}} \cdot \frac{\overline{AW}}{\overline{WB}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

در مورد مرکز دایره محاطی خارجی، برهان اصولاً به همان صورت برهان مرکز دایره محاطی داخلی است که آوردن آن به عهده خواننده گذارده می شود.

باقی می ماند که خود قضیه سوا را ثابت کنیم. فرض کنید AP ، BQ ، CR در نقطه ای مثل T متقارب باشند. از A خطی موازی BC رسم می کنیم تا CR ، BQ (یا امتداد آنها) را به ترتیب در B' و C' قطع کند. چون

$$\triangle BPT \sim \triangle B'AT \quad \text{و} \quad \triangle CPT \sim \triangle C'AT$$

داریم:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{AT}}, \quad \frac{\overline{PT}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AC'}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{AC'}}$$

همچنین

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB'}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC}}$$

بنابراین از ضرب سه تساوی اخیر در یکدیگر، تساوی مطلوب به دست می آید.
برای اثبات عکس آن، T را فصل مشترک (امتدادهای) BQ و CR و P' را فصل مشترک (امتدادهای) AT و BC می گیریم. پس بنابه آنچه که ثابت نمودیم

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{P'C}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

از سوی دیگر، بنابر فرض نیز داریم

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\overline{BP'}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$$

با افزودن ۱ به طرفین این تساوی اخیر خواهیم داشت

$$\frac{\overline{BP'} + \overline{P'C}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{PC}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$$

و از اینجا نتیجه می شود که $\overline{P'C} = \overline{PC}$ و لذا $P = P'$.

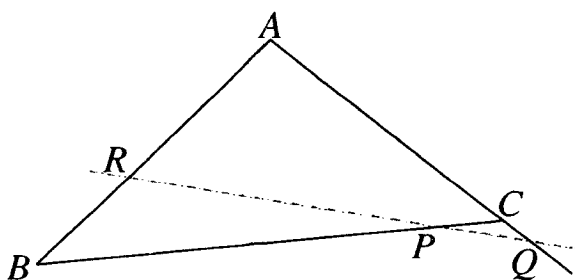
(ما عمداً از ضمیمه نمودن شکل خودداری نمودیم تا به خواننده فرصتی برای آزمون کارائی استدلال را برای همه حالات داده باشیم).

چنانکه خواننده دقیق توجه خواهد کرد، عکس آن فقط و فقط هنگامی صادق است که پاره‌خطها را جهتدار در نظر بگیریم. یعنی $\frac{BP}{PC} > 0$ ، اگر BP و PC همجهت باشند. و $\frac{BP}{PC} < 0$ ، اگر BP و PC مختلف‌الجهت باشند. روشن است که ملاحظات متشابه برای نسبتهای دیگر صادق است.

قضیه زیر را که ارتباط نزدیکی با قضیه سوا دارد، منلاطوس از علمای اسکندریه (حدود ۹۸ میلادی) کشف کرده است.

قضیه الف ۱۱.۱. نقاط P, Q, R به ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB از $\triangle ABC$ همخطاند، اگر فقط و فقط اگر:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1$$



شکل الف ۸.

برهان. چون نیازی به این قضیه نخواهیم داشت، فقط راه اثبات آنرا نشان می‌دهیم و اثبات مشروح آنرا به عهده خواننده می‌گذاریم. برای این که ثابت کنیم این شرط لازم است، از نقطه A خطی به موازات خطی که با نقاط P, Q, R مشخص می‌شود رسم می‌کنیم تا (امتداد) ضلع BC را در A' قطع کند. سپس همه نسبتهای موجود را برحسب نسبتهای پاره‌خطهای واقع بر خط BC بیان می‌کنیم. برای اثبات کفایت قضیه، مانند برهان قضیه سوا عمل می‌کنیم. ■

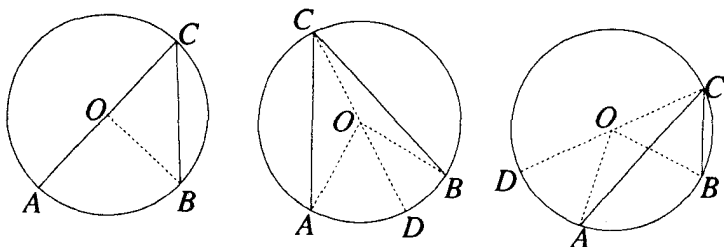
الف ۲. زاویه‌های محاطی

لم الف ۱.۲. زاویه محاط در یک قوس دایره برابر نصف زاویه مرکزی آن قوس است. به خصوص همه زاویه‌های محاط در یک قوس برابرند.

برهان. نقاط A, B, C را بر دایره O در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض می‌کنیم مرکز O یا بر پاره خط AC یا بر پاره خط BC باشد. برای تثبیت قرارداد، مرکز O را بر وتر AC می‌گیریم: پس چون $\triangle OBC$ متساوی الساقین است، داریم $\angle OCB = \angle OBC$. ولی از آنجا که $\angle AOB$ زاویه خارجی $\triangle OBC$ است

$$\therefore \angle AOB = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle ACB.$$



شکل الف ۹.

حالت ۲. فرض می‌کنیم مرکز O داخل $\angle ACB$ باشد. قطر CD را در نظر می‌گیریم. پس از حالت ۱، داریم

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \angle ACD + \angle DCB \\ &= \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle DOB) = \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

حالت ۳. فرض می‌کنیم مرکز O خارج $\angle ACB$ باشد. مانند پیش CD را یک قطر می‌گیریم. پس دوباره از حالت ۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \angle BCD - \angle ACD \\ &= \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOD) = \frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

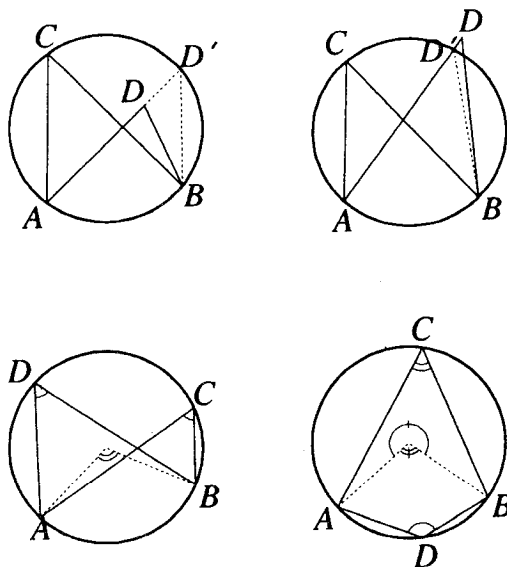
قضیه الف ۲.۲. فرض می‌کنیم نقاط C و D در یک طرف یک خط AB واقع باشند. در این صورت، نقاط A, B, C, D هم‌دایره‌اند، اگر و فقط اگر، $\angle ACB = \angle ADB$.
برهان. باقی می‌ماند که عکس آن را ثابت کنیم. دایره‌ای که از نقاط A, B و C بگذرد رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم D درون این دایره واقع باشد. D' را فصل مشترک این دایره در امتداد AD می‌گیریم. پس

$$\angle ADB = \angle AD'B + \angle DBD' > \angle AD'B = \angle ACB$$

ولی اگر نقطه D خارج این دایره باشد، D' را فصل مشترک دایره با AD می‌گیریم. در این صورت

$$\angle ADB < \angle ADB + \angle DBD' = \angle AD'B = \angle ACB.$$

از این رو، اگر $\angle ADB = \angle ACB$ ، آنگاه نقطه D باید بر دایره‌ای باشد که از نقاط A و B و C می‌گذرد (و در این حالت، روشن است که بنا به لم قبل تساوی برقرار است). ■



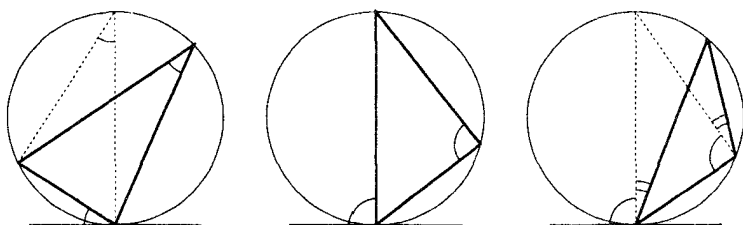
شکل الف ۱۰.

فرع الف ۳.۲. فرض می‌کنیم C و D در دو طرف یک خط AB واقع باشند. در این صورت نقاط A, B, C, D هم‌دایره‌اند، اگر و فقط اگر:

$$\angle ACB + \angle ADB = \pi$$

فرع الف ۴.۲. زاویه بین مماس بر دایره و یک وتر آن، برابر است با زوایای محاط در قوس داخل این زاویه.

برهان. شکلها به اندازه هزار واژه گویا هستند.



شكل الف ١١.

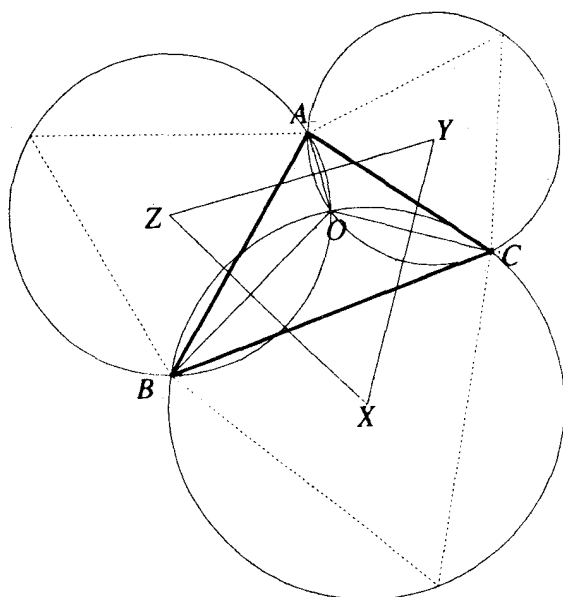
الف ٣. قضية نايلئون

اگرچه قضیہ ناپلئون جزو زمینہ مورد نیاز درس ما نیست، برہان ذیل کہ توسط کی ہاشیموتو^۱ (یک دانش آموز کلاس دہم، مدرسہ لیکساید (Lakeside)، سیاتل) در ماہ مہ، ۱۹۹۲ آورده شدہ است بہ نحو ظریف، برہان رُس ہانسبرگر^۲ را سادہ کردہ است.

قضیه الف. ۱.۳. بر هر ضلع یک مثلث دلخواه، و در خارج آن مثلث متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم. مرکزوارهای این سه مثلث متساوی‌الاضلاع، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. **برهان.** $\triangle ABC$ داده شده است. فرض کنید X, Y, Z مرکزهای دایره محیطی مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشد که به ترتیب بر اضلاع AB, CA, BC و بیرون $\triangle ABC$ ساخته شده‌اند، و O فصل مشترک دایره Y و Z (غیر از A) باشد. پس بنابر فرع الف. ۳.۲ در بخش قبل، داریم $\angle AOB = \frac{2\pi}{3} = \angle AOC$. بنابرین $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$. از اینجا نتیجه می‌شود که دایره X نیز از نقطه O می‌گذرد و (بازهم بنابر فرع الف. ۳.۲). پس، نشان دادیم که سه دایره محیطی مذکور در O متلاقع هستند.

اما، خط XY واصل بین دو مرکز، بر وتر مشترک OC عمود است. همین‌طور، OB بر OC عمود است. ولی $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ و بنابراین $\angle X = \frac{\pi}{3}$. و به‌طریق مشابه، $\angle Y = \frac{\pi}{3} = \angle Z$. برهان تمام است. ■

1. Kay Hashimoto 2. *Mathematical Gems*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1973, pp. 34-36.



شکل الف ۱۲.

الف ۴. دایرهٔ آپولونیوس

لم الف. ۱.۴. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های یک رأس مثلث، ضلع مقابل را به نسبت طولهای دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند.

برهان. فرض کنید نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A از $\triangle ABC$ ضلع BC را به ترتیب در D و E قطع کنند نقطهٔ F را بر امتداد ضلع AB طوری اختیار می‌کنیم که $CF \parallel AD$. پس

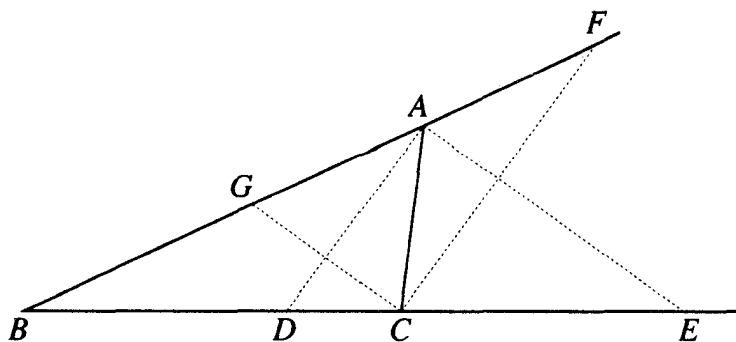
$$\angle AFC = \angle BAD = \angle DAC = \angle ACF$$

بنابراین، $\triangle ACF$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AF} = \overline{BA} : \overline{AC}$$

همچنین نقطهٔ G را بر AB چنان اختیار می‌کنیم که $CG \parallel AE$. پس

$$\angle AGC = \angle FAE = \angle EAC = \angle ACG$$



شکل الف ۱۳.

بنابراین، مثلث متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که

$$\overline{BE} : \overline{EC} = \overline{BA} : \overline{AG} = \overline{BA} : \overline{AC}$$

برهان دیگر. از همان قراردادهای برهان فوق استفاده می کنیم. چون D بر نیمساز $\angle ABC$ واقع است، طولهای عمودهای وارد از نقطه D بر اضلاع AB و AC برابرند (بنابر الف. ۷.۱). بنابراین نسبت مساحت‌های $\triangle ABD$ و $\triangle ACD$ برابر است با $\overline{AB} : \overline{AC}$. از طرف دیگر این دو مثلث در رأس A ارتفاع مشترک دارند. از این رو نسبت مساحت‌های این دو مثلث نیز برابر $\overline{BD} : \overline{CD}$ است. و

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

برای نیمساز خارجی AE از رأس A ، $\triangle ABE$ و $\triangle ACE$ را در نظر می گیریم، و همان استدلال را به کار می بریم.

عکس این لم را از یکتا بودن نقطه‌ای که ضلع مثلث را به نسبت ثابتی تقسیم می کند، نتیجه می گیریم.

فرع الف ۲.۴. فرض می کنیم D, E به ترتیب بر ضلع BC و امتداد آن از $\triangle ABC$ طوری قرار داشته باشند که:

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{BC}$$

در این صورت AD و AE نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A هستند.

قضیه الف ۳.۴. (آپولونیوس). دو نقطه A و B و نسبت ثابت $m : n$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم C و D نقاطی بر AB باشند چنان‌که

$$\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{DA} : \overline{DB} = m : n$$

در این صورت یک نقطه P بر دایره به قطر CD قرار دارد، اگر و فقط اگر

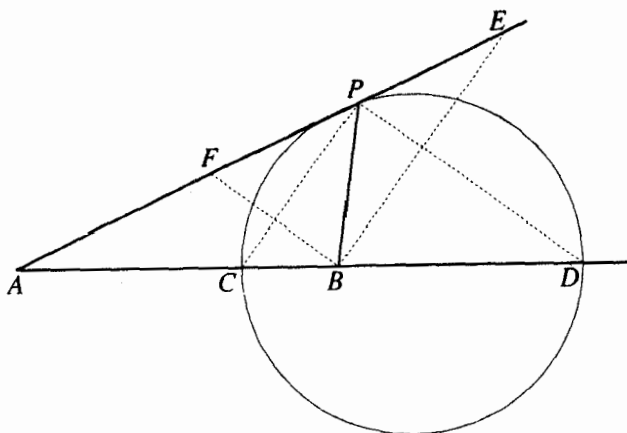
$$\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$$

برهان. فرض کنید P نقطه‌ای است که در شرط:

$$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{CA} : \overline{CB} (= \overline{DA} : \overline{DB})$$

صدق می‌کند. پس به موجب فرع الف ۲.۴، PD ، PC ، نیمسازهای داخلی و خارجی رأس P از $\triangle PAB$ هستند. از این رو $\angle CPD = \frac{\pi}{4}$ ، و از آنجا نقطه P بر دایره‌ای به قطر CD واقع است. به عکس، فرض کنید P ، نقطه دلخواهی است بر دایره‌ای به قطر CD . نقاط F ، E را به ترتیب بر AP و امتداد آن طوری اختیار می‌کنیم که $BF \parallel DP$ ، $BE \parallel CP$. پس

$$\overline{AP} : \overline{PE} = \overline{AC} : \overline{CB} = m : n$$



شکل الف ۱۴.

$$\overline{AP} : \overline{PF} = \overline{AD} : \overline{DB} = m : n$$

بنابراین، $\overline{PE} = \overline{PF}$. چون $BE \parallel CP$ و $BF \parallel DP$ و $\angle CPD = \frac{\pi}{4}$ داریم $\angle EBF = \frac{\pi}{4}$. از این رو P وسط وتر مثلث قائم الزاویه BEF است. از اینجا نتیجه می شود که $\overline{PB} = \overline{PE}$ و بنابراین:

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$



پیوست ب

معماهای سال نو

این «معماهای سال نو» را مؤلف به صورت کارت تبریک در چند سال اخیر برای دوستانش فرستاده است. نظر به اینکه هدف، عمومیت دادن ریاضیات است، این معماها (احتمالاً به جز معمای سال ۱۹۸۶) مشکل طرح نشده اند. چون این معماها مابین دوستان مؤلف شهرت یافته اند، آنها را در اینجا می آوریم به این امید که خوانندگان نیز همین کار را انجام دهند.

۱۹۸۵

$$\begin{array}{ll} ۰ = (۱ - ۹ + ۸) \times ۵ & ۱ = ۱ - \sqrt{۹} + ۸ - ۵ \\ ۲ = ۱ + (-\sqrt{۹} + ۸)/۵ & ۳ = -۱ - ۹ + ۸ + ۵ \\ ۴ = ۱ \times (-۹ + ۸) + ۵ & ۵ = ۱ - ۹ + ۸ + ۵ \\ ۶ = ۱ \times (۹ - ۸) + ۵ & ۷ = ۱ + ۹ - ۸ + ۵ \\ ۸ = ? & ۹ = \sqrt{-۱ + ۹ + ۸} + ۵ \\ ۱۰ = (۱ + ۹ - ۸) + ۵ & \end{array}$$

آیا می توانید عبارت مشابهی برابر ۸ پیدا کنید؟ (مجازید فقط از جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر و پرانتز استفاده کنید. جواب یکتا نیست).

$$\square\square\square\square^2 = \square ۱۹\square\square ۸۵\square \quad .۲$$

۳. الف) مربع یک عدد درست n با ۱۹۸۵ شروع می شود:

$$n^2 = ۱۹۸۵۰۰۰$$

کوچکترین عدد درست و مثبت n را بیابید که این ویژگی را داشته باشد.
ب) آیا عدد درستی وجود دارد که مربع آن به ۱۹۸۵ ختم شود؟

۱۹۸۶

HAPPY

در تفریق $\frac{-TIGER}{YEAR}$ به جای حروف عددهای یک رقمی بگذارید تا تفریق درست شود. به شرطی

که بدانیم:

۱. $TIGER$ در میان ۱۲ حیوان

(rat, ox, tiger, rabbit, dragon, snake, horse, ram, monkey, cock, dog, boar)
(موش، گاو، ببر، خرگوش، اژدها، مار، اسب، قوچ، میمون، خروس، سگ، خوک) را مرتبه سوم را دارد و عددی که با $TIGER$ نمایش داده شده است در تقسیم بر ۱۲ باقیمانده ۳ دارد.

$$TIGER \equiv 3 \quad (\text{پیمانه } 12)$$

۲. از آنجا که برای جایگذاری ۹ حرفی که در این مسئله حرفی - عددی آمده است، ده رقم ممکن ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ وجود دارند، چنین بر می آید که باید یکی از ارقام را حذف کنید، ولی این رقم حذف شده، باقیمانده تقسیم عدد $YEAR$ بر ۱۲ است.

۱۹۸۷

بدون استفاده از ارقام ۱، ۹، ۸، ۷، جاهای خالی را با اعداد یک رقمی پر کنید چنان که تساوی زیر برقرار شود

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & 1 & \square \\ \hline \square & 9 & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = 87$$

۱۹۸۸

۱.

$$\begin{aligned} 1988 &= 12^2 + 20^2 + 38^2 = 8^2 + 30^2 + 32^2 \\ &= 8^2 + 18^2 + 40^2 = 4^2 + 26^2 + 36^2 \\ &= 4^2 + 6^2 + 44^2 = \square^2 + \square^2 + \square^2 \end{aligned}$$

یعنی، عبارت دیگری برابر ۱۹۸۸ به صورت مجموع مربعات سه عدد درست و مثبت بیابید.

۲. نشان دهید که ۱۹۸۸ را نمی توان به صورت مجموع مربعات دو عدد درست و مثبت بیان کرد.

با ملاحظه:

$$۱۹۸۹ = (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵)^2 + (۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹)^2$$

چهار عدد طبیعی متوالی p, q, r, s و شش عدد طبیعی متوالی u, v, w, x, y, z پیدا کنید چنانکه:

$$۱۹۸۹ = (p + q + r + s)^2 + (u + v + w + x + y + z)^2$$

۱۹۹۰

فرض کنید.

$$P_n = ۲۱۹۱^n - ۸۰۳^n + ۶۰۸^n - ۱۱^n + ۷^n - ۲^n.$$

پس

$$P_7 = ۴۵۲۵۲۶۰ = ۱۹۹۰ \times ۲۲۷۴, \quad P_1 = ۱۹۹۰$$

ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، P_n بر ۱۹۹۰ بخشپذیر است.

۱۹۹۱

۱. در یک مربع جادویی، مجموع عناصر هر سطر، ستون، و قطر برابرند. مثلاً شکل ۱ یک مربع جادویی با مجموع جادویی ۳۴ است. جاهای خالی شکل ۲ را طوری پر کنید که یک مربع جادویی حاصل شود.

	۱۹	۹۱
۹۹		

شکل ۲

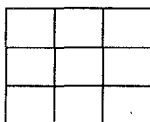
۱	۸	۱۳	۱۲
۱۴	۱۱	۲	۷
۴	۵	۱۶	۹
۱۵	۱۰	۳	۶

شکل ۱

۲. آیا یک عدد درست دو یا چند رقمی، که تمام ارقام آن از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ تشکیل شده باشند (مثلاً اعداد ۱۹۹۱، ۱۷، ۷۳۱۵۹۱۳۷۵۱۷۹، و ۷۳۵ از این گونه اعداد درست اند) می تواند مربع یک عدد درست باشد؟

پنج عدد از جدول شکل ۱ در زیر را طوری اختیار کنید که هیچ دوتا از آنها در یک سطر یا در یک ستون واقع نباشند، سپس این پنج عدد را با هم جمع کنید. همیشه عدد ۱۹۹۲ را به دست خواهید آورد. به طور مثال:

$$۱۹۹ + ۹۲ + ۱۷۷ + ۹۷۹ + ۵۴۵ = ۱۹۹۲$$



شکل ۲

۱۹	۹۲	۶۰	۶۶۵	۴۷۰
۳۳۳	۴۰۶	۳۷۴	۹۷۹	۷۸۴
۹۴	۱۶۷	۱۳۵	۷۴۰	۵۴۵
۱۹۹	۲۷۲	۲۴۰	۸۴۵	۶۵۰
۱۳۶	۲۰۹	۱۷۷	۷۸۲	۵۸۷

شکل ۱

جدول شکل ۲ را با ۹ عدد درست و مثبت متمایز چنان پر کنید که اگر هر سه عددی از آنها را طوری اختیار کنید که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا یک ستون نباشند و آنها را در هم ضرب کنید، همواره عدد ۱۹۹۲ به دست آید. اصولاً چند جواب متفاوت می‌توانید پیدا کنید؟ [وقتی دو جواب را یکی می‌گیریم که بتوان یکی را از دیگری با برخی یا همه اعمال زیر به دست آورد: (الف) دوران، (ب) تقارن محوری، (ج) تعویض ترتیب سطرها، (د) تعویض ترتیب ستونها].

فرض کنید:

$$Q_n = ۱۲^n + ۴۳^n + ۱۹۵۰^n + ۱۹۸۱^n$$

در این صورت

$$Q_1 = ۱۲ + ۴۳ + ۱۹۵۰ + ۱۹۸۱ = ۱۹۹۳ \cdot ۲$$

$$Q_2 = ۱۴۴ + ۱۸۴۹ + ۳۸۰۲۵۰۰ + ۳۹۲۴۳۶۱ \\ = ۷۷۲۸۸۵۴ = ۱۹۹۳ \cdot ۳۸۷۸$$

$$Q_3 = ۱۷۲۸ + ۷۹۵۰۷ + ۷۴۱۴۸۷۵۰۰۰ + ۷۷۷۴۱۵۹۱۴۱ \\ = ۱۵۱۸۹۱۱۵۳۷۶ = ۱۹۹۳ \cdot ۷۶۲۱۲۳۲$$

پیدا کنید همهٔ اعداد درست و مثبت n را که به‌ازای آنها Q_n بر ۱۹۹۳ بخشپذیر باشد.

۱۹۹۴

دنباله‌ای از اعداد داریم که عکس مربعات اعداد صحیح از ۱۹ تا ۹۴ هستند.

$$\frac{1}{19^2}, \frac{1}{20^2}, \frac{1}{21^2}, \dots, \frac{1}{93^2}, \frac{1}{94^2}$$

فرض کنید به‌جای هر جفت عدد a و b از این اعداد بتوانیم عدد $a + b - ab$ را بگذاریم. مثلاً به‌جای دو عدد $\frac{1}{33}$ و $\frac{1}{66}$ می‌توانیم یک عدد تنهای $\frac{163}{135168}$ را بگذاریم، زیرا

$$\frac{1}{33^2} + \frac{1}{66^2} - \frac{1}{33^2} \cdot \frac{1}{66^2} = \frac{163}{135168}$$

این روش را تکرار کنید تا فقط یک عدد بماند. نشان‌دهید که عدد نهایی، مستقل از راه و ترتیبی است که اعداد جفت و تعویض‌شده‌اند. عدد نهایی کدام است؟

فهرست راهنما

پاپوس ۱۴۲	آبل، ن. ه. ۶
پاسکال ۱۱۲	آپولونیوس ۱۷۰
خط ۱۱۲	آدامار ۳
پترسن ۱۰۶	آبر ۸۲
پوانکاره ۱۴۷، ۱۵۳	اتساع ۱۲۰، ۱۳۵، ۱۳۸
تاکاگی ۴۱	اکلز ۱۰۶
تبدیل بیضوی ۱۳۸، ۱۵۲	اسکوت ۱۰۶
تبدیل خطی ۳۴	اشتاینر ۱۱۱، ۱۳۲
تبدیل سهموی ۱۳۸، ۱۵۲	اصل تقارن ۱۲۷، ۱۵۰
تبدیل موبیوس ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۲۴، ۱۲۵	انتقال ۱۲۰، ۱۴۹
تبدیل هذلولوی ۱۳۸، ۱۵۲	انعکاس ۱۲۶، ۱۳۹، ۱۵۲
تبدیل‌های خطی کسری ۱۱۷	دایره ۱۴۰
تبدیل‌های دو خطی ۱۱۷	مرکز ۱۴۰
تبدیل‌های همساز ۱۱۷	اولیر، ۶، ۶۳، ۶۴، ۱۴۵
تقارن ۱۴۹	باک ۱۸
توابع بیضوی ۶	بزرگنمایی ۱۲۰
ثابت زاویه ۱۳۸، ۱۵۲	بطلمیوس ۶۳، ۶۴، ۱۴۵
جزء انگاری ۱۰	قضیه ۱۱۰
جزء حقیقی ۱۰	بواز ۱۸
	بویویی ۱۴۷

سه تایی فیثاغورس ۴۴	حاصلضرب دو تبدیل ۱۱۹
سیمسن ۷۵، ۷۳	حافظ زاویه ۱۴۱
شناسه ۲۸، ۱۲۰	حرکت جسم صلب ۱۴۸
شورقه گر ۱۵۴	خط اویلر ۷۱
شوینبرگ ۱۳۰	خط سیمسن ۷۳، ۷۸، ۸۴
صفحه گارس ۲۳	خط کانتور ۸۹، ۹۱
صفحه مختلط ۲۲، ۲۳	خودمزدوج ۷۴
صورت نرمال ۱۳۷، ۱۵۲	دایره آپولونیوس ۱۳۹، ۱۶۲، ۱۷۰
ضریب ۱۳۸	دایره کلیفرد ۶۷، ۶۸
عمل عکس ۱۲۱	دایره محاطی خارجی ۹۳، ۹۶، ۹۸، ۱۶۱
فرانک موری ۹۸	دایره محاطی داخلی ۹۳، ۹۵، ۹۸، ۱۶۰
فویر باخ ۹۳	دایره محیطی ۶۷، ۶۹، ۸۱، ۸۲، ۸۴، ۸۷
قضیه ۹۲، ۹۳، ۱۴۳	۹۶، ۱۱۰، ۱۵۸، ۱۶۷
فیثاغورس ۶۵	دایره نه نقطه ۷۱، ۷۲، ۸۰، ۸۷، ۹۲، ۱۱۱، ۱۴۳
قانون متوازی الاضلاع ۴۵	دایره واحد ۳۰
قانون کسینوسها ۱۱۰	دایره یکه ۳۴
قدر مطلق ۱۰	دسته دایره ها ۱۳۳
قضیه بنیادی جبر ۱۷، ۱۸، ۳۶	دسته دایره های بیضوی ۱۳۳
قضیه سوا ۱۶۱، ۱۶۲	دسته دایره های سهموی ۱۳۴
قضیه فیثاغورس ۶۳، ۶۵	دسته دایره های مزدوج ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۹
قضیه کلیفرد ۶۵	دسته دایره های هذلولوی ۱۳۳
قضیه ناپلئون ۶۰، ۱۰۷، ۱۶۷	دموآور ۳۱، ۳۲
کاتایاما ۱۵۴	دوران ۱۲۰، ۱۴۹
کاتس، نلسن ۱۵۴	دیویس ۹۶
کاکستر ۱۴۳	ریمان ۱۱۵
کالبد ۱۰	زاویه مزدوج ۱۰۲
کلیفرد ۶۵	زیرگروه ۱۲۰
کاتور ۸۶، ۸۸، ۱۱۲	سوا ۱۶۱

- کرة ریمان ۱۱۵، ۱۱۸، ۱۴۹
کوشی ۶
کوليج ۷۳
- گاليلئو گاليله ۶۲
گاوس ۱۸، ۶
گرایتسر ۱۴۳
گروه ۱۱۲، ۱۱۹، ۱۴۹
گنجنگاشتی ۱۴۹
لِباچفسکی ۱۴۷
ماتریس دوران ۳۵
ماتریس وارونپذیر ۱۲۰
مبین ۴۶
متشابه ۵۵، ۱۲۶، ۱۳۷
متقارن ۱۲۷
مثلت پادک ۱۵۹
محدب ۴۸
محور
— انگاری ۲۳
— حقیقی ۲۳، ۱۲۴
مختصات قطبی ۲۸
مختصات گرانیگاهی ۴۸، ۱۰۶، ۱۰۸
مرکز ارتفاعات ۶۹، ۷۱، ۷۹، ۹۲، ۱۱۱، ۱۵۸
مرکز دایره محاطی خارجی ۹۴، ۱۶۱، ۱۶۳
مرکز دایره محیطی ۵۹، ۶۹، ۷۱، ۱۵۸
مرکز درونی (درون مرکز) ۹۴، ۹۵، ۱۶۰
مرکزوار (مرکز ثقل) ۲۶، ۶۰، ۷۱، ۸۸، ۱۰۶، ۱۱۱، ۱۵۶
مزدوج مختلط ۱۰
مزدوج هسته پواسون ۴۳
مقسوم علیه صفر ۱۲
منلائوس اسکندرانی ۱۶۴
- مویوس ۱۱۷
میانه ۲۶، ۱۵۶
- نایبراری مثلثی ۲۱، ۲۲، ۲۷، ۳۳، ۱۴۸
نایئون ۶۲
نسبت زرین ۶۵
نسبت ناهمساز ۶۴، ۶۶، ۱۲۳، ۱۴۹
نقاط حدی دسته دایره ۱۳۳، ۱۳۹
نقطه بینهایت ۱۱۵، ۱۶۷
نقطه ثابت ۱۳۴، ۱۵۰
نقطه کانتور ۹۰، ۹۲
نقطه کلیفرد ۶۷، ۶۸
نقطه مشترک دسته دایره ۱۳۳
نگاشتهای دوسویی ۱۱۸
واحد انگاری ۱۰
والیس ۴۴
ویلیام دالاس ۷۷
هاشیموتو ۱۶۷
هانسبرگر ۱۶۷
هسته پواسون ۴۳
همانی ۱۱۹
همدایره ۶۳-۶۶، ۶۷، ۶۸، ۱۱۱، ۱۲۴، ۱۴۰، ۱۴۶، ۱۵۹
همدیس ۱۴۱، ۱۴۹
همریخت ۱۲۰
هم مرکز ۱۵۱
هندسه تصویری ۶، ۶۴
هیأت ۸
یاکوبی ۶
یانو ۱۵۴